

С. В. Буцык

для
студентов-гуманитариев

М
А
Т
Е
М
А
Т
И
К
А



Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинская государственная академия культуры и искусств»
Кафедра информатики

С. В. Буцык

МАТЕМАТИКА

для студентов-гуманитариев

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по образованию в области
историко-архивоведения в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
033000 «Культурология»
и 034700 «Документоведение и архивоведение»

Челябинск
2011

УДК 51
ББК 22.1я73 + 74.58
Б94

Утверждено на заседании кафедры информатики 29.03.2011,
протокол № 7

Буцык, С. В. Математика для студентов-гуманитариев: учеб.
пособие / С. В. Буцык; Челяб. гос. акад. культуры и искусств. – Челя-
бинск, 2011. – 92 с.

ISBN 978-5-94839-294-3

Пособие раскрывает содержание и особенности курса математики для сту-
дентов-гуманитариев. В качестве базового материала рассматриваются теоретиче-
ские основы и практические задания по следующим четырем темам: множества и
операции над ними; высказывания и операции над ними; элементы теории вероят-
ностей; элементы математической статистики. Кроме того, предложена дополни-
тельная тематика и методический материал для преподавателей.

Структура и содержание соответствуют федеральным государственным
образовательным стандартам высшего профессионального образования по
группе направлений подготовки бакалавров 030000 «Гуманитарные науки».
Издание адресовано студентам, обучающимся по указанным направлениям, а
также преподавателям математики.

Рецензенты:

В. Н. Худяков, д-р пед. наук, проф. кафедры информатики Че-
лябинской государственной академии культуры и искусств;

Т. Ю. Винтиш, канд. пед. наук, доцент кафедры алгебры, гео-
метрии и методики преподавания математики Челябинского государ-
ственного педагогического университета

Учебное издание

Сергей Владимирович Буцык

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ
Учебно-методическое пособие

Редактор В. А. Макарычева

Сдано в РИО 24.02.2011. Подписано к печати
Формат 60х84/16. Объем 5,3 п. л. Тираж 500 экз. Заказ № 1186

Отпечатано в типографии ЧГАКИ. Ризограф
454091, Челябинск, ул. Орджоникидзе 36а

© Буцык С. В., 2011

© Челябинская государственная
академия культуры и искусств, 2011

ISBN 978-5-94839-294-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
БАЗОВЫЙ МАТЕРИАЛ	7
Тема 1. Множества и операции над ними	
Теоретическая часть.	8
Практическая часть.	16
Тема 2. Высказывания и операции над ними	
Теоретическая часть.	19
Практическая часть.	24
Тема 3. Элементы теории вероятностей	
Теоретическая часть.	27
Практическая часть.	34
Тема 4. Элементы математической статистики	
Теоретическая часть.	39
Практическая часть.	43
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ	46
Тема Д 1. Системы счисления и делимость в числовых множествах	
Теоретическая часть.	47
Практическая часть.	52
Тема Д 2. Соответствия, отображения, функции	
Теоретическая часть.	54
Практическая часть.	62
Тема Д 3. Элементы теории вероятностей	
Теоретическая часть.	65
Практическая часть.	68
МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ	70
Основной курс.	71
Расширенный курс.	80
Ответы к заданиям.	83
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	92

ВВЕДЕНИЕ

Процесс реформирования российского образования вносит существенные изменения в подготовку студентов высших учебных заведений, что требует обновления методик, пересмотра подходов к преподаванию даже по таким традиционным предметам, как математика.

Федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по направлениям подготовки 033000 «Культурология», 034700 «Документоведение и архивоведение» и т. п. рекомендуется изучение математики в рамках математического, естественно-научного (и программно-информационного) цикла дисциплин.

В результате изучения первой части предложенного материала студенты должны знать основные понятия теории множеств, элементы теории вероятности, математической статистики; уметь решать практические задачи методами математического анализа; владеть базовыми знаниями в области математики и т. п.

В требованиях к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата указывается, что выпускник должен обладать, в частности, **следующими компетенциями**:

- владеть культурой мышления, воспринимать, обобщать, анализировать информацию, ставить цель и выбирать пути ее достижения;
- логически верно, ясно и аргументировано выражать мысли в устной и письменной форме;
- использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

К особенностям стандартов третьего поколения по гуманитарным направлениям подготовки применительно к изучению математики можно отнести:

а) незначительную трудоемкость базовой части указанного цикла дисциплин (в пределах 10–20 зачетных единиц при 5–6 рекомендуемых дисциплинах);

б) наличие в перечне для разработки примерных учебных программ и пособий наряду с математикой таких дисциплин, как

информатика, информационные технологии, программные средства обработки информации и т. п.

Данный набор находит отражение и в компетенциях выпускника-гуманитария: владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях.

Следует заметить, что во многих стандартах предыдущего второго поколения (2000–2002 гг.) по укрупненной группе специальностей «Гуманитарные науки» математика и вовсе рассматривалась не как отдельный предмет, а в рамках единой дисциплины «Математика и информатика».

Таким образом, при разработке данного пособия мы поставили **следующие задачи**:

- оптимизировать содержание и трудоемкость дисциплины для выполнения обязательных требований стандартов;
- обеспечить возможность рационального расширения тематики курса;
- способствовать межпредметным связям между математикой, информатикой и информационными технологиями.

Темы в учебно-методическом пособии распределены на базовые и дополнительные, а также в издание включены материалы для преподавателя.

Базовый материал составлен из следующих четырех тем:

1. Множества и операции над ними: основные понятия; задание и равенство множеств; подмножества и диаграммы; операции над множествами; числовые множества; задание и изображение числовых множеств.

2. Высказывания и операции над ними: основные понятия; операции над высказываниями; составление таблиц истинности; доказательство равенства и тавтологии.

3. Элементы теории вероятностей: случайные события; формулы и правила комбинаторики; решение комбинаторных задач; случайные величины; числовые характеристики случайных величин.

4. Элементы математической статистики: основные понятия; первичная обработка выборки; наглядное изображение выборки; точечные оценки числовых параметров распределения.

Дополнительный материал пособия составляют следующие три темы:

Д 1. Системы счисления и делимость в числовых множествах: системы счисления в множестве натуральных чисел; правила перевода натуральных чисел; делимость целых неотрицательных чисел; правило нахождения НОД и НОК двух чисел.

Д 2. Соответствия, отображения, функции: бинарные соответствия; отображения; числовые функции; основные виды числовых функций; основные способы построения графиков функций.

Д 3. Элементы теории вероятностей: Сумма и произведение случайных событий. Условная вероятность. Ковариация случайных величин. Коэффициент корреляции.

Каждая из вышеуказанных тем разделена на теоретическую и практическую части, где представлены примеры решения задач и задания для самостоятельного решения.

Материал для преподавателя содержит рекомендации по построению дисциплины на основе базового материала пособия (основной курс), а также с использованием дополнительного материала (расширенный курс). В частности, для обоих курсов приведены:

- рекомендуемая трудоемкость в зачетных единицах;
- формы итогового контроля;
- распределение часов по темам и видам занятий;
- методика организации текущего контроля и др.

Для удобства работы преподавателя даны ответы к заданиям для самостоятельного решения (тем базового материала) и примерных контрольных работ (в рамках основного курса).

Базовый материал

ТЕМА 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные понятия

Понятие *множества* относится к математическим объектам, для которых нет строгого определения. Определение обычно вводится лишь на интуитивном уровне. Поясним его примерами. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве учащихся некоторой школы, о множестве парт в данной аудитории и т. д. В повседневной жизни вместо слова «множество» употребляют слова «набор», «собрание», «коллекция», «стадо», «табун» и т. д.

Объекты любой природы (люди, дома, книги, геометрические фигуры, числа и т. д.), составляющие множество, называют его *элементами*. Например, студент Иванов является элементом множества студентов I курса, март – элементом множества месяцев в году и т.д.

Отношение между множеством и его элементами обычно выражают при помощи слова «*принадлежит*». Например: цифра 5 принадлежит множеству цифр.

Множества обычно *обозначают* заглавными буквами латинского алфавита ($A, B, C, D, \dots$), а их элементы – малыми ($a, b, c, d, \dots$), слово «принадлежит» заменяют символом « $\in$ » и записывают, например: $a \in A$ (объект a принадлежит множеству A) или $a \notin A$ (объект a не принадлежит множеству A). Например, если A – множество российских поэтов, то поэт Пушкин $\in A$, а поэт Шекспир $\notin A$.

Множества могут быть *конечными* или *бесконечными*. Например, множество преподавателей вуза – конечно, а множество точек прямой – бесконечно.

Множество может содержать один или несколько элементов. *Пустым множеством* называют единственное множество, не содержащее ни одного элемента (обозначается символом $\emptyset$). Например, множество людей, побывавших в 2001 году на Луне.

Задание и равенство множеств

Множество считают *заданным*, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

1-й способ задания множеств – перечисление всех элементов множества. Например, множество A , состоящее из объектов, a, b, c, d записывают: $A = \{a; b; c; d\}$. Данный способ применим только для конечных множеств, число элементов которых невелико.

2-й способ задания множеств – формулировка характеристического свойства всех элементов множества (свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они). В этом случае в фигурных скобках записывают обозначение произвольного элемента множества, ставят вертикальную черту, а затем характеристическое свойство всех элементов, т. е. $A = \{x \mid \text{характеристическое свойство всех элементов } x\}$. Способ применим для задания как конечных, так и бесконечных множеств.

Например, множество цветов радуги K можно записать первым способом: $K = \{\text{красный; оранжевый; желтый; зеленый; голубой; синий; фиолетовый}\}$ или вторым: $K = \{x \mid x - \text{цвет радуги}\}$.

Множества A и B считают *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (записывают: $A = B$). Например, равны следующие множества: $\{4; 9; 16\}$, $\{16; 4; 9\}$, $\{\sqrt{16}; \sqrt{81}; \sqrt{256}\}$ и $\{2^2; 3^2; 4^2\}$.

Подмножества и диаграммы

Множество B называют *подмножеством* множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент B принадлежит множеству A (записывается: $B \subset A$). Например, A – множество студентов вуза, B – множество первокурсников этого вуза.

Различают два вида подмножеств множества A : *несобственные* (само A и $\emptyset$) и *собственные* (все остальные подмножества, если они существуют).

Свойство подмножеств: Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Такие изображения множеств называют **диаграммами (или кругами) Эйлера-Венна**.

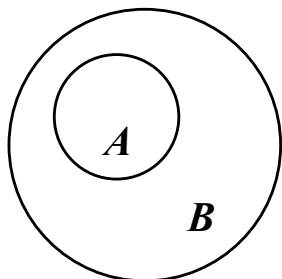


Рис. 1.1

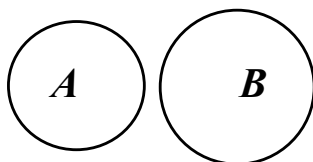


Рис. 1.2

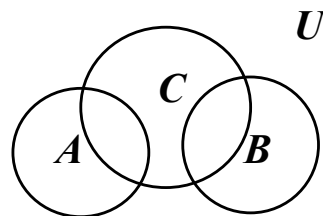


Рис. 1.3

На рисунке 1.1 показаны множества A и B такие, что $A \subset B$, а на рисунке 1.2 – множества A и B , не имеющие общих элементов.

Часто бывает, что рассматриваются только подмножества одного и того же множества. Такое множество называют *универсальным множеством* (обозначают U и изображают на диаграммах в виде прямоугольника).

Например, если A – множество учащихся первого класса школы, B – множество учащихся второго класса школы, а C – множество девочек школы, то U удобно обозначить множество всех учащихся школы (рис. 1.3).

Операции над множествами

Пусть даны два множества: A и B . **Пересечением** этих **множеств** называют множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B (обозначается: $A \cap B$), т. е. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Например, $A = \{\text{ручка; карандаш; циркуль; маркер}\}$.
 $B = \{\text{фломастер; маркер; ручка; перо}\}$. Тогда $A \cap B = \{\text{ручка; маркер}\}$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то они *не пересекаются* (записывается $A \cap B = \emptyset$). Если множества A и B имеют хотя бы один общий элемент, то множества A и B *пересекаются* (записывается $A \cap B \neq \emptyset$).

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна пересечение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области (рис. 1.4).

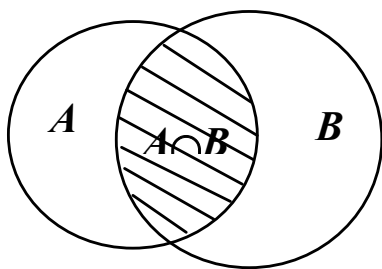


Рис. 1.4

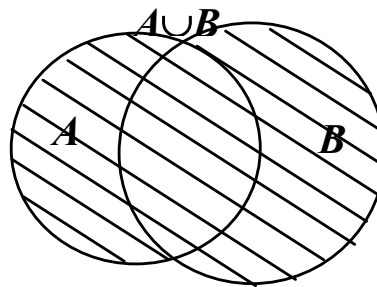


Рис. 1.5

Свойства операции пересечения

1. Коммутативность: для любых множеств A и B верно равенство $A \cap B = B \cap A$.
2. Ассоциативность: для любых множеств A , B , C верно равенство $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$. В частности, для любого множества A имеем: $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$.

Пусть даны два множества: A и B . **Объединением** этих **множеств** называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (обозначается: $A \cup B$), т. е. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Например, $A = \{\text{ручка; карандаш; циркуль; маркер}\}$. $B = \{\text{фломастер; маркер; ручка; перо}\}$. Тогда $A \cup B = \{\text{ручка; карандаш; циркуль; маркер; фломастер; перо}\}$.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна объединение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области (рис. 1.5).

Свойства операции объединения

1. Коммутативность: для любых множеств A и B верно равенство $A \cup B = B \cup A$.
2. Ассоциативность: для любых множеств A , B , C верно равенство $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$. В частности, для любого множества A имеем: $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup U = U$.

4. Дистрибутивность: Для любых множеств A , B и C справедливы равенства:

$$\text{а) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$\text{б) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Пусть даны два множества: A и B . **Разностью** данных **множеств** называется множество элементов, принадлежащих A , но не принадлежащих B (обозначают: $A \setminus B$).

Например, $A = \{\text{ручка; карандаш; циркуль; маркер}\}$.
 $B = \{\text{фломастер; маркер; ручка; перо}\}$. Тогда $A \setminus B = \{\text{карандаш; циркуль}\}$.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна разность $A \setminus B$ изображается следующим образом (рис. 1.6).

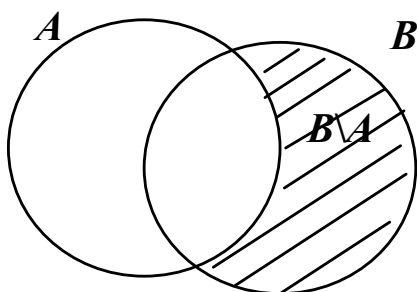


Рис. 1.6

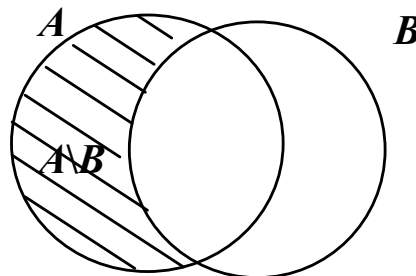


Рис. 1.7

Свойства операции разность

Из определения разности очевидно, что для данной операции не будут справедливы свойства коммутативности и ассоциативности (рис. 1.7). Представленные ниже свойства показывают связь разности с операциями пересечения и объединения:

$$1. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ для любых множеств } A, B \text{ и } C;$$

$$2. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C \text{ для любых } A, B \text{ и } C.$$

В случае когда одно из заданных множеств является подмножеством другого, говорят не о разности, а о дополнении одного множества до другого. Пусть $B \subset A$, тогда множество всех элементов, принадлежащих A , но не принадлежащих B , называют **дополнением к подмножеству B в множестве A** (обозначают B'_A).

Например, если A – множество учащихся некоторого класса, B – множество девочек класса, то B'_A – множество мальчиков класса.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна дополнение B'_A изображается следующим образом (рис. 1.8).

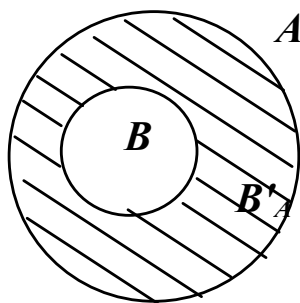


Рис. 1.8

Дополнение к множеству B в универсальном множестве U обозначают без индекса, т. е. B' .

Свойства операции дополнения

Для любых подмножеств A и B универсального множества U имеют место следующие равенства:

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Числовые множества

На практике особую роль играют **числовые множества** – множества, элементами которых являются числа. Рассмотрим некоторые числовые множества, для которых существуют специальные обозначения.

$N = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$ – множество *натуральных* чисел.

$Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ – множество *целых* чисел.

Также используют следующие подмножества данного множества целых: $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ – множество целых неотрицательных чисел и $Z_- = \{\dots; -3; -2; -1\}$ – множество целых отрицательных чисел. Очевидно, что $Z = Z_0 \cup Z_-$.

$Q = \{m / n \mid m \in Z, n \in Z, n \neq 0\}$ – множество *рациональных* чисел. Важно отметить, что любое рациональное число представимо в виде периодической десятичной дроби, например:

$$\frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{1}{3} = 0,(3); \quad \frac{5}{12} = 0,41(6) \text{ и т. п.}$$

I – множество *иррациональных* чисел, т. е. чисел, которые нельзя представить в виде периодической десятичной дроби, например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , e , ... и т. п.

$R = Q \cup I$ – множество *действительных* чисел.

Приведенные выше множества удобно изобразить на одной диаграмме Эйлера-Венна (рис. 1.9). При этом наглядно видно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$. Заметим также, что $I = Q'_R$ (рис. 1.10).

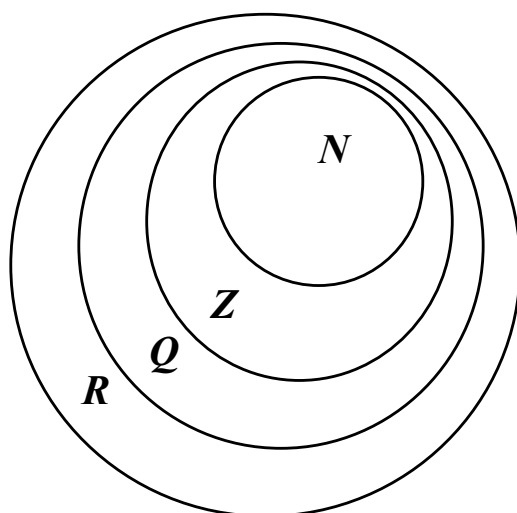


Рис. 1.9

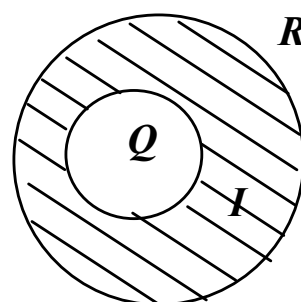


Рис. 1.10

Задание и изображение числовых множеств

Ранее приведенные способы задания множеств, справедливы и для числовых множеств. Например, K – множество натуральных чисел, меньших 7, можно записать 1-м способом: $K = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ или 2-м: $K = \{x \mid x \in N, x < 7\}$.

В тоже время, для наглядного представления числовых множеств и выполнения операций над ними часто удобнее использовать вместо диаграмм Эйлера-Венна **числовую прямую**. На числовой прямой указывается положительное направление, точка начала отсчета и задается единичный отрезок. Также указывается базовое числовое множество (обычно, N , Z , Q , или R), ключевые точки изображаемого множества, производится его штриховка и обозначение.

Например, множество $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < x \leq 7\}$ (т. е. множество целых чисел, больших 2, но меньших либо равных 7) изображено на рис. 1.11.

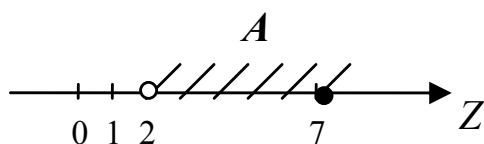


Рис. 1.11

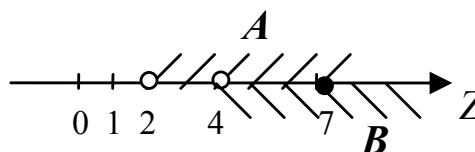


Рис. 1.12

Следует обратить внимание на то, как изображены ключевые точки множества A : точка 2 – «выколота» (2 не является элементом множества A), а точка 7 – заштрихована (7 является элементом множества A).

При выполнении операций над числовыми множествами с помощью числовой прямой, обычно, штриховка первого множества располагается над прямой, а второго – под прямой. Кроме того, используется различный наклон штриховки. С помощью рисунка 1.12, где изображены множества A и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 4\}$, значительно легче произвести операции пересечения, объединения или разности указанных множеств.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

(примеры, аналогичные контрольным, отмечены знаком *)

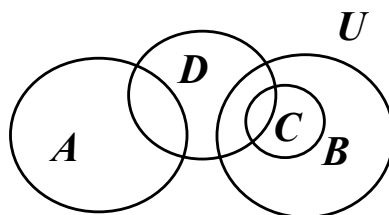
Пример 1. Даны множества: $A = \{1; 21; 121; 15; 52; 512\}$; $B = \{16; 2; 5\}$; $C = \{1; 21; 15\}$; $D = \{21; 15; 52\}$; $E = \{121; 512\}$; $F = \{12; 15; 25\}$; $K = \{21; 121; 512; 52; 15\}$; $Q = \{512\}$.

Укажите, какие из данных множеств являются собственными подмножествами множества A .

Решение: $C \subset A, D \subset A, E \subset A, K \subset A, Q \subset A$.

Пример 2*. Даны множества: U – множество учащихся школы, A – подмножество учащихся 7 класса, B – учащихся младших классов, C – учащихся 1 класса, D – спортсменов школы. Изобразите эти множества с помощью диаграммы.

Решение:

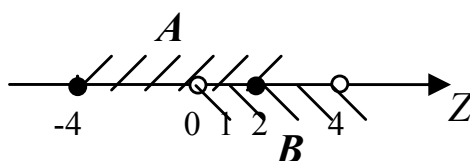


Пример 3*. Даны мн-ва $A = \{\text{п; о; д; и; у; м}\}$ и $B = \{\text{м; о; д; а}\}$. Найти пересечение, объединение и разность этих множеств.

Решение: $A \cap B = \{\text{о; д; м}\}$; $A \cup B = \{\text{п; о; д; и; у; м; а}\}$;
 $A \setminus B = \{\text{п; и; у}\}$; $B \setminus A = \{\text{а}\}$.

Пример 4. Даны числовые множества $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 2\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 4\}$. С помощью числовой прямой найдите пересечение, объединение и разность этих множеств.

Решение: Изобразим множества на числовой прямой:



С помощью изображения найдем: $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 2\}$,
 $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x < 4\}$, $A \setminus B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 0\}$.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Задать приведенные множества первым (если это возможно) и вторым способами:

A – множество континентов Земли; B – множество планет Солнечной системы; C – множество гласных букв русского алфавита; D – множество точек, равноудаленных от концов отрезка AB ; E – множество точек окружности с центром в точке O и радиусом r .

1.2. Даны множества. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами множества A , если:

а) $A = \{a; d; f; h; q; k\}$; $B = \{a; d; k\}$; $C = \{s; p; q\}$; $D = \{q; k; f\}$; $E = \{a; m\}$; $F = \{f; h; a; b\}$; $Q = \{d; k\}$.

б) $A = \{o; p; y; f; л; ц\}$; $B = \{ц; y; к\}$; $C = \{л; o; p\}$; $D = \{ф; o; p; a\}$; $E = \{o; y\}$; $F = \{ф; y; p; к\}$; $Q = \{o; p\}$.

1.3. Даны множества. Изобразите эти множества на диаграммах Эйлера-Венна:

а) U – множество студентов университета, A – подмножество студентов 1 курса, B – студентов 2 курса, C – девушек университета, D – отличников университета.

б) U – множество четырехугольников плоскости, A – подмножество трапеций, B – параллелограммов, C – ромбов, D – прямоугольников, E – квадратов.

в) U – множество книг в библиотеке института, M – подмножество книг по математике, A – книг по алгебре, F – книг по физике, E – множество книг на английском языке.

1.4. Даны множества A , B и C . Задайте эти множества 1-м способом и изобразите их на диаграмме Эйлера-Венна:

а) A – множество букв слова «катер»; B – множество букв слова «взморье»; C – множество букв слова «паром».

б) A – множество букв слова «колба»; B – множество букв слова «факелоносец»; C – множество букв слова «носок».

в) A – множество букв Вашего имени; B – множество букв Вашего отчества; C – множество букв Вашей фамилии.

1.5. Даны множества A и B . Найдите пересечение, объединение и разность этих множеств если:

а) $A = \{y; т; ю; г\}$, $B = \{т; ю; ф; я; к\}$;

б) $A = \{ф; а; р; т; у; к\}$, $B = \{р; у; б; а; н; о; к\}$;

в) $A = \{4; 8; 2; 5\}$, $B = \{5; 2; 8; 3; 4\}$;

г) $A = \{7; 9; 3; 1\}$, $B = \{2; 4; 1; 8; 0\}$.

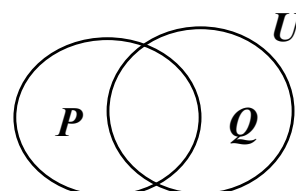
1.6. Задано множество U – всех цифр, а также множества A и B . Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A' , B' , если:

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 0\}$;

б) $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{6; 7; 8\}$;

в) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{1; 2; 5; 6\}$.

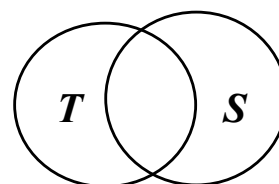
1.7. Даны множества P и Q , причем $P \subset U$, $Q \subset U$ (см. рис.). Отметьте штриховкой области, изображающие множества:



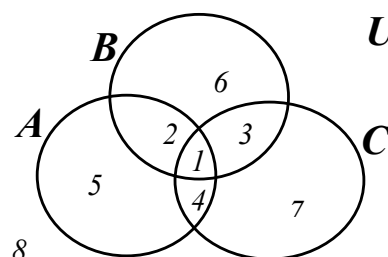
а) P' ; б) Q' ; в) $(P \cap Q)'$;

г) $(P \cup Q)'$; д) $P' \cup Q'$; е) $P' \cap Q'$.

1.8. Даны множества T и S (см. рис.). Отметьте штриховкой следующие множества: а) $T \setminus S$; б) $S \setminus T$; в) $(T \cup S) \setminus S$; г) $T \setminus (T \cap S)$; д) $(T \cup S) \setminus T$; е) $(T \cup S) \setminus (T \cap S)$. Есть ли среди полученных множеств равные? Укажите это.



1.9. Записать с помощью множеств A , B , C и соответствующих операций каждую из 8 неперекрывающихся областей, изображенных на следующем рисунке.



1.10. Задать приведенные числовые множества первым (если это возможно) и вторым способами:

а) множество целых неотрицательных чисел, меньших 2;

б) множество натуральных чисел, не больших 8;

в) множество целых чисел, заданных на отрезке $[-4; 2]$;

г) множество действительных чисел, заданных на интервале $(1; 2)$.

1.11. Даны числовые множества A и B . С помощью числовой прямой найдите пересечение, объединение и разность этих множеств если:

а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < x \leq 8\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_0, x < 5\}$;

б) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 5\}$;

в) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x \leq 7\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 3\}$;

г) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -2\}$.

ТЕМА 2. **ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные понятия

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Например, предложения «Все люди голубоглазы», «Существуют одногорбые верблюды» – являются высказываниями, первое из которых ложно, а второе истинно.

Высказываниями не считаются: вопросительные и восклицательные предложения (например, «Как пройти в библиотеку?», «С Днем рождения!»), а также предложения, содержащие переменные, которые могут принимать различные значения (например, « $x + 3 = 5$ », «Поэт x написал поэму y »).

Высказывания обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита, например $A, B, C, D \dots$

Из заданных высказываний A и B можно составить новые высказывания, используя связки «и», «или», «если... то...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не». Полученные высказывания называют **составными**, а входящие в них высказывания A и B – **элементарными** высказываниями. Например: A : «Сегодня полнолуние», B : «Я буду петь» – элементарные высказывания; «Если сегодня полнолуние, то я буду петь» – составное.

Два составных высказывания A и B называются **равносильными** (или эквивалентными), если они одновременно истинны или одновременно ложны при любых предположениях об истинности входящих в них элементарных высказываний. Записывают: $A = B$.

Операции над высказываниями

Пусть дано некоторое высказывание A . **Отрицанием** высказывания A называют высказывание «не- A » и обозначают символом $\bar{A}$. Например A : «Москва – столица России», $\bar{A}$: «Москва не является столицей России» (или «Неверно, что Мо-

сква – столица России»). Если некоторое высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот. Это утверждение удобно записать при помощи *таблицы истинности*.

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

(И – истинное высказывание,
Л – ложное высказывание).

Свойство отрицания: любое высказывание A равносильно высказыванию $\bar{\bar{A}}$, т. е. $A = \bar{\bar{A}}$.

Пусть A и B – два элементарных высказывания. **Конъюнкцией** данных высказываний называется высказывание « A и B » и обозначается $A \wedge B$. Например, A : «4 делится на 2», B : «4 больше 2», $A \wedge B$: «4 делится на 2 и 4 больше 2». Конъюнкция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны одновременно. В остальных случаях конъюнкция ложна.

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Свойства конъюнкции:

- 1) Коммутативность: $A \wedge B = B \wedge A$, для любых двух высказываний A и B .
- 2) Ассоциативность: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, для любых A , B и C .
- 3) Конъюнкция $A \wedge \bar{A}$ тождественно ложна, т. е.: $A \wedge \bar{A} = \text{Л}$.

Пусть A и B – два элементарных высказывания. **Дизъюнкцией** данных высказываний называется высказывание « A или B » и обозначается $A \vee B$. Например, A : «4 больше 2», B : «4 равно 2», $A \vee B$: «4 больше 2 или 4 равно 2». Дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны одновременно. В остальных случаях дизъюнкция истинна.

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Свойства дизъюнкции:

- 1) Коммутативность: $A \vee B = B \vee A$, для любых двух высказываний A и B .
- 2) Ассоциативность: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, для любых A , B и C .
- 3) Конъюнкция $A \vee \bar{A}$ тождественно истинна, т. е.: $A \vee \bar{A} = \text{И}$.
- 4) Дистрибутивность: а) $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
б) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
- 5) Законы де Моргана: а) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$; б) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

Пусть A и B – два элементарных высказывания. **Импликацией** данных высказываний называется высказывание «Если A , то B » и обозначается $A \Rightarrow B$. Например, A : «Сейчас 8 утра», B : «Я иду в институт», $A \Rightarrow B$: «Если сейчас 8 утра, то я иду в институт». Условились считать, импликация двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда первое высказывание (посылка) – истинно, а второе (заключение) – ложно. В остальных случаях импликация истинна.

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Свойства импликации:

- 1) $(A \Rightarrow B) = (\bar{A} \vee B)$.
- 2) Закон контрапозиции: $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Пусть A и B – два элементарных высказывания. **Эквивалентцией** данных высказываний называется высказывание « A тогда и только тогда, когда B » и обозначается $A \Leftrightarrow B$.

Например, A : «Я не хожу в школу», B : «Сегодня выходной день»,
 $A \Leftrightarrow B$: «Я не хожу в школу тогда и только тогда, когда выходной».
 Эквиваленция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. В остальных случаях эквиваленция ложна.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Для решения практических задач удобно свести 4 последних определения в единую таблицу, которая наглядно показывает существенные отличия каждой логической операции.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Составление таблиц истинности

Чтобы составить таблицу истинности для любой логической формулы можно воспользоваться следующим алгоритмом:

- 1) Определите количество элементарных высказываний, входящих в искомое составное (n).
- 2) Определите число различных комбинаций значений истинности элементарных высказываний (2^n), запишите данные комбинации в виде строк таблицы.

Например, для формулы $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ число различных комбинаций (а, следовательно и строк таблицы) будет равно 4 (2^2), а для формулы $A \wedge (B \vee C)$ – 8 (2^3). Строки можно расставлять произвольным образом, однако, для удобства, мы рекомендуем придерживаться предложенного ниже расположения.

<i>A</i>	<i>B</i>
И	И
И	Л
Л	И
Л	Л

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
И	И	И
И	И	Л
И	Л	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	И	Л
Л	Л	И
Л	Л	Л

3) Определите число логических операций, участвующих в формуле и определите порядок их выполнения, который может зависеть как от наличия скобок, так от приоритета операций. Наибольший приоритет имеет отрицание, затем конъюнкция, затем дизъюнкция, затем импликация, и самый низкий приоритет имеет эквиваленция.

Доказательство равенства и тавтологии

Определение *равносильности* (эквивалентности) двух составных высказываний было сформулировано нами в первой части темы.

Для доказательства необходимо построить обе части равенства в одной таблице и сравнить соответствующие строки. Если во всех строках обе части принимают одинаковые значения, то равенство будет считаться доказанным по определению (подробнее см. пример 3).

Составные высказывания, истинные при любых предложениях о входящих в них элементарных высказываниях, называют *тавтологиями*.

Для доказательства тавтологии нужно составить таблицу истинности для указанной формулы. Если итоговые значения получаются истинными во всех строках, то тавтология считается доказанной (подробнее см. пример 4).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

(примеры, аналогичные контрольным, отмечены знаком *)

Пример 1*. Составьте таблицу истинности для следующей формулы: $A \wedge (B \vee C)$.

Решение: Поскольку в формуле 3 элементарных высказывания (A , B и C), то различных комбинаций значений истинности (а, соответственно, и строк таблицы) будет равно 8. Порядок выполнения операций определяется скобками: сначала дизъюнкция B и C , затем конъюнкция A и полученного в четвертом столбце высказывания.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л
Л	И	Л	И	Л
Л	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л

Пример 2. Даны следующие высказывания:

A : «Сегодня жарко» – И, B : «Я буду загорать» – И, C : «Я буду купаться» – Л.

Записать формулу $A \Rightarrow (B \wedge C)$ в словесной форме, составить для нее необходимую часть таблицы и определить истинность составного высказывания.

Решение: $A \Rightarrow (B \wedge C)$: «Если сегодня жарко, то я буду загорать и купаться».

A	B	C	$B \wedge C$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$
И	И	Л	Л	Л

Таким образом, составное высказывание (при заданных значениях высказываний A , B и C) ложно.

Пример 3^{*}. Докажите следующее равенство:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

Решение: построим обе части равенства в одной таблице истинности.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Поскольку соответствующие значения в левой и правой частях одинаковые, можно считать равенство доказанным.

Пример 4^{*}. Докажите следующую тавтологию:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Решение: составим таблицу истинности для указанной формулы.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	И

Поскольку при любых возможных комбинациях (значений элементарных высказываний) формула принимает истинное значение, можно утверждать, что $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ – тавтология.

Задания для самостоятельного решения

2.1. Даны следующие высказывания: A : «Идет дождь», B : «Я читаю книгу», C : «Я пою». Запишите указанные ниже формулы в словесной форме.

а) $A \Rightarrow (B \vee C)$; б) $\overline{B \vee C} \Leftrightarrow A$; в) $(\overline{B} \wedge \overline{C}) \Rightarrow A$.

2.2. Составьте таблицу истинности для формулы:

а) $A \Rightarrow \overline{B} \wedge A$; б) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow B$;
в) $A \vee (\overline{B} \Rightarrow C)$; г) $A \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$;
д) $A \wedge \overline{B \vee C}$; е) $A \vee B \wedge C$;
ж) $A \wedge B \Rightarrow C$; з) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{C}$.

2.3. На основе приоритета операций избавиться от лишних скобок в записи высказываний: а) $((A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$;
б) $(B \Leftrightarrow (C \Rightarrow A)) \wedge (\overline{A} \vee (B \wedge C))$; в) $((\overline{A \vee B}) \Rightarrow C) \wedge (A \Leftrightarrow B)$.

2.4. Даны следующие высказывания: A : «Я буду решать задачи», B : «Сегодня солнечно», C : «Сегодня понедельник».

Задайте значения для A , B и C (например, с учетом текущего дня или произвольно). Запишите указанные ниже формулы в словесной форме, составьте для них необходимые части таблицы, и определите истинность формул:

а) $A \Rightarrow (B \vee C)$; б) $A \Rightarrow (B \wedge C)$;
в) $A \Rightarrow (\overline{B \vee C})$; г) $A \Leftrightarrow (\overline{B} \vee C)$.

2.5. Докажите следующее равенство:

а) $(A \Rightarrow B) = (\overline{A} \vee B)$; б) $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
в) $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$; г) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

2.6. Докажите следующую тавтологию:

а) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$; б) $((A \Leftrightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
в) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$; г) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

ТЕМА 3.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Случайные события

Наблюдаемые нами события (или явления) можно разделить на следующие три вида: достоверные; невозможные; случайные.

Событие называется **достоверным**, если в результате некоторого испытания (эксперимента) оно обязательно произойдет (обозначается: Ω). Событие называется **невозможным**, если в результате испытания оно заведомо не произойдет (обозначается: $\emptyset$). Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может либо произойти, либо не произойти (обозначаются: $A, B, C, D \dots$).

Пример. Испытание – бросание монеты. A – выпадение «орла» или «решки» ($A = \Omega$), B – выпадение «орла» и «решки» одновременно ($B = \emptyset$), C – выпадение «решки» (C – случайное событие).

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей случайных событий. Рассмотрим их **основные свойства**.

Случайные события A и B называют **несовместными**, если появление одного из них в одном и том же испытании исключает появление другого. Например, испытание – стрельба стрелка по мишени. A – попадание, B – промах. A и B – несовместные события.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания произойдет хотя бы одно из них. Например, испытание – работа светофора. При этом обязательно произойдет хотя бы одно из трех следующих событий: A – загорится красный сигнал светофора, B – загорится желтый, C – загорится зеленый.

События называют **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например, испытание – бросание игрального кубика. Выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков можно считать равновоз-

возможными событиями, если предположить, что кубик изготовлен из однородного материала и имеет форму правильного шестигранника.

Пусть проводится некоторое испытание, которое может иметь n и только n различных исходов (событий), причем все эти исходы попарно несовместны и равновозможны. Число $p(A)$, равное отношению числа исходов k , благоприятствующих событию A , к числу всевозможных исходов n , называют **вероятностью события A** , т. е.:

$$p(A) = \frac{k}{n}.$$

Свойство вероятности:

$$0 \leq p(A) \leq 1, \text{ в частности } p(\emptyset) = 0; p(\Omega) = 1.$$

Пример. Испытание – бросание игрального кубика. A – выпадение 5 очков, B – выпадение не менее 3 очков (т. е. от 3 до 6). Вероятности событий можно рассчитать так:

$$p(A) = \frac{k_1}{n} = \frac{1}{6}; \quad p(B) = \frac{k_2}{n} = \frac{4}{6}.$$

Формулы и правила комбинаторики

При непосредственном вычислении вероятностей часто бывает затруднительно найти k и n вручную, поскольку приходится считать большое количество комбинаций.

Например. В коробке 4 красных и 6 зеленых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что среди них 2 красных и 1 зеленый карандаш?

В таких случаях используют формулы и правила специального подраздела теории вероятностей – комбинаторики. В данном пособии приведены некоторые из них.

Перестановки без повторений – комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов, отличающиеся друг от друга *только порядком их расположения*. Число всевозможных перестановок без повторений из n элементов обозначается:

$$P_n = n! \text{ (говорят «}n\text{-факториал»)}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

То есть:

$$1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \dots 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

При этом принято считать, что $0! = 1$.

Пример. Сколькими способами можно рассадить на одной скамейке 9 человек? *Решение:* $P_9 = 9! = 362880$.

Размещения без повторений – комбинации, составленные из n различных элементов по k группы k элементов, которые отличаются друг от друга *либо составом, либо порядком их расположения*. Число всевозможных размещений из n по k обозначается:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. Сколько всего 6-значных телефонных номеров, в каждом из которых цифры не повторяются?

Решение: $A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200$.

Сочетания без повторений – комбинации, составленные из n различных элементов в группы по k элементов, которые отличаются друг от друга *только составом*. Число всевозможных сочетаний из n по k обозначается:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать делегацию – 5 человек – из группы, содержащей 12 человек?

Решение: $C_{12}^5 = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать из совокупности элементов m способами, и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то пару элементов $(a; b)$ в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример. Из деревни A в деревню B ведут три дороги, а из B в C ведут две дороги. Сколькими способами можно пройти из A в C через B ?

Решение: Дорогу из A в B можно выбрать 3 способами, а дорогу из B в C – 2 способами. Таким образом, пару дорог $A-B$ и $B-C$ можно выбрать $2 \cdot 3 = 6$ способами.

Решение комбинаторных задач

Для решения комбинаторной задачи, в которой могут быть задействованы перечисленные формулы и правило, мы предлагаем разбить задачи **на 4 типа**:

Тип «А». Осуществляется выбор одного элемента из одного множества.

В задачах такого типа ответ, обычно, очевиден – число комбинаций равно числу элементов в множестве.

Пример. В группе 28 студентов. Сколькими способами можно вызвать одного студента к доске? *Ответ:* 28 способов.

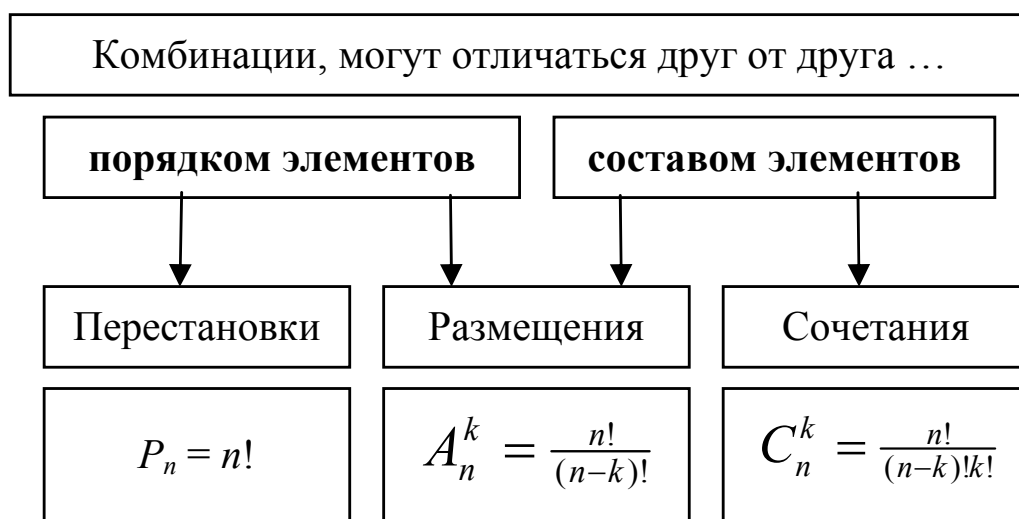
Тип «Б». Сначала осуществляется выбор одного элемента из первого множества, а затем выбор одного элемента из второго множества.

Для решения задачи такого типа необходимо использовать правило произведения.

Пример. В группе 28 студентов (24 девушки и 4 юноши). Сколькими способами можно вызвать к доске одну девушку и одного юношу? *Ответ:* $24 \cdot 4 = 96$ способов.

Тип «В». Осуществляется выбор нескольких элементов из одного множества.

Чтобы решить задачу такого типа необходимо, в первую очередь, правильно определить комбинаторную формулу. Это можно сделать с помощью следующей схемы:



Пример. В группе 28 студентов. Сколькими способами можно вызвать к доске пару студентов?

Решение: Выбранные комбинации могут отличаться друг от друга составом элементов, например: (Иванова, Петрова), (Сидоров, Иванова), (Сидоров, Васин) и т. п. В тоже время порядком расположения элементов пары отличаться не могут, поскольку в задаче ничего не сказано о том, что первый выбранный студент будет решать, например, задачу № 7, а второй – задачу №8. Таким образом, (Иванова; Петрова) и (Петрова; Иванова) – это одна и та же пара (при заданных условиях).

Следовательно, используем формулу для сочетаний:

$$C_{28}^2 = \frac{28!}{26!2!} = \frac{27 \cdot 28}{1 \cdot 2} = 378.$$

Тип «Г». Сначала осуществляется выбор нескольких элементов из первого множества, а затем выбор нескольких элементов из второго множества.

Для решения задача, сначала нужно найти число комбинаций в каждом из множеств по формулам (тип «В»), а затем применить правило произведения (тип «Б»).

Пример. В группе 28 студентов (24 девушки и 4 юноши). Сколькими способами можно вызвать к доске двух девушек и двух юношей?

Решение: Двух девушек из 24 можно выбрать $C_{24}^2 = \frac{24!}{22!2!} = \frac{23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 276$ способами, а двух юношей из 4 $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$ способами.

По правилу произведения: $276 \cdot 6 = 1656$ способов.

Теперь решим рассмотренный ранее пример, в котором **для нахождения вероятности события нужно использовать формулы и правило комбинаторики.**

Пример. В коробке 4 красных и 6 зеленых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что из них 2 красных и 1 зеленый карандаш?

Решение: Комбинации карандашей могут отличаться составом, но не порядком расположения: $n = C_{10}^3$, $k = C_4^2 \cdot C_6^1$.

$$p(A) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 7!}{2 \cdot 2 \cdot 5! \cdot 10!} = \frac{3}{10}.$$

Случайные величины

Ранее уже приводились события, суть которых состоит в появлении того или иного числа. *Например*, при бросании игрального кубика могут появиться целые числа от 1 до 6. Но заранее определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин. Можно сказать, что число очков – есть величина случайная, а целые числа от 1 до 6 – возможные значения этой величины.

Случайная величина X – это числовая функция, определенная на множестве элементарных событий. Множество значений этой функции $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют *множеством возможных значений* случайной величины.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называют *дискретными*. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют *распределением вероятностей случайной величины*. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть задано в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Приведем несколько примеров:

1) X – число попаданий в корзину баскетболистом Ивановым при 3 штрафных бросках задано следующим распределением:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Отметим, что: $0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,3 = 1$.

2) X – дневная температура воздуха 5 июля в городе Москва за последние годы задана распределением:

x_i	23	24	25	26	27	28	29	30
p_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

Сумма вероятностей всевозможных событий также равна 1.

Числовые характеристики случайных величин

Иногда удобнее пользоваться числами, которые описывают случайную величину не по отдельным значениям, а в целом. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности, т. е.:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Математическое ожидание случайной величины также называют средним значением случайной величины.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.:

$$D(X) = | M(X - M(X))^2 | \text{ или } D(X) = | M(X^2) - (M(X))^2 |.$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень отклонения случайной величины от своего среднего значения или степень разброса случайной величины.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии, т. е.: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Среднее квадратическое отклонение, в отличие от дисперсии, имеет одинаковую размерность с самой случайной величиной, что практически более удобно.

Пример. Найдём числовые характеристики приведенной ранее случайной величины X – число попаданий в корзину баскетболистом Ивановым при 3 штрафных бросках:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Решение:

$$M(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,2 + 0,8 + 0,9 = 1,9.$$

$$M(X^2) = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,3 = 0,2 + 1,6 + 2,7 = 4,5.$$

$$D(X) = | M(X^2) - (M(X))^2 | = 4,5 - 1,9^2 = 0,89. \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,94.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

(примеры, аналогичные контрольным, отмечены знаком *)

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать для туристической поездки страну из 7, предложенных агентством?

Решение: комбинаторная задача относится к типу «А» (выбор 1-го элемента из 1-го множества). Ответ: 7 способов.

Пример 2. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Решение: комбинаторная задача относится к типу «Б» (выбор одного элемента из первого множества, а затем выбор одного элемента из второго множества). Применим правило произведения: $5 \cdot 4 = 20$ способов.

Пример 3^{*}. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг какого-либо государства с тремя горизонтальными полосами одной и той же ширины, если есть материя пяти различных цветов?

Решение: задача относится к типу «В» (осуществляется выбор нескольких элементов из одного множества). Для определения комбинаторной формулы приведем примеры возможных комбинаций: (бело-сине-красный) – флаг России; (бело-зелено-красный) – флаг Болгарии (другой состав); (красно-сине-белый) – флаг Сербии (другой порядок).

Следовательно, комбинации могут отличаться друг от друга как составом элементов, так и порядком их расположения, поэтому нужно применять формулу размещений:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ способов составить флаг.}$$

Пример 4. У одного человека есть 8 книг по математике, а у другого – 6 книг по физике. Сколькими способами они могут обменять три книги по математике на две книги по физике?

Решение: задача относится к типу «Г». Возможные комбинации книг каждого человека могут отличаться друг от

друга только составом элементов (в каком порядке будут отдаваться книги не важно). Следовательно нужно применять формулу сочетаний, а затем правило произведения:

$$C_8^3 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 56 \cdot 15 = 840.$$

Пример 5*. Испытание – на экзамене 35 билетов, пронумерованных от 1 до 35. Наудачу берется один. A – номер вытянутого билета делится на 3; B – номер вытянутого билета двузначный, но меньший 20. Найти вероятности событий A и B .

Решение: $n = 35, k_1 = 11$ (т. е. 3, 6, ... 33) $\Rightarrow p(A) = \frac{11}{35}$;

$$k_2 = 10 \text{ (т. е. 10, 11, ... 19)} \Rightarrow p(B) = \frac{10}{35}.$$

Пример 6. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит оргкомитет в составе 10 юношей и 2 девушек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки?

Решение: комбинации дежурных будут отличаться только составом (порядок среди 5 дежурных не важен), поэтому используем формулу сочетаний. Число всевозможных исходов $n = C_{12}^5$. Число благоприятных исходов $k = C_2^2 \cdot C_{10}^3 = 1 \cdot C_{10}^3$.

$$p(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{12}^5} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{7! \cdot 5!}{12!} = \frac{4 \cdot 5}{11 \cdot 12} = \frac{5}{33} \approx 0,15.$$

Пример 7*. Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти: $p(x = 4)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

x_i	0	2	4	6
p_i	0,2	0,4		0,1

Решение: по определению $0,2 + 0,4 + x + 0,1 = 1 \Rightarrow x = 0,3$.
 $M(X) = 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,1 = 0,8 + 1,2 + 0,6 = 2,6$.
 $M(X^2) = 0^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,3 + 6^2 \cdot 0,1 = 1,6 + 4,8 + 3,6 = 10$.
 $D(X) = | M(X^2) - (M(X))^2 | = 10 - 2,6^2 = 3,24$. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1,8$.

Задания для самостоятельного решения

3.1. Из 12 слов мужского, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?

3.2. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков (русского, английского, немецкого, французского и итальянского) на любой другой из них?

3.3. На вечеринке присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

3.4. В футбольной команде 11 человек. Сколько вариантов имеет вратарь, чтобы отдать пас другому игроку своей команды?

3.5. Сколькими способами можно из слова «здание» выбрать две буквы, одна из которых гласная, другая согласная?

3.6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

3.7. Сколькими способами можно из слова «космонавт» выбрать две буквы, одна из которых гласная, а другая согласная?

3.8. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если ни одно из этих чисел не содержит двух повторяющихся цифр?

3.9. В наборе 12 разноцветных фломастеров. Сколькими способами можно выбрать 1 цвет?

3.10. Сколькими способами можно выбрать четыре краски из шести различных красок?

3.11. Рота состоит из 3 офицеров, 4 сержантов и 20 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из 1 офицера, 2 сержантов и 10 рядовых?

3.12. В группе среди 30 студентов 24 девушки (среди которых 12 брюнеток, 8 блондинок и 4 шатенки) и 6 юношей (4 брюнета и 2 блондина). Одного из студентов вызывают к доске. Найдите вероятности следующих событий: A – вызвали девушку; B – вызвали юношу; C – вызвали блондинку; D – вызвали брюнета или брюнетку; E – вызвали девушку, но не шатенку.

3.13. Игра «Русское лото». В мешке лежат бочонки, пронумерованные от 1 до 90. Ведущий наудачу достает один. Найти вероятности следующих событий: A – вытащили бочонок с № 5;

B – вытащили бочонок с четным номером; C – вытащили бочонок с двузначным номером; D – вытащили бочонок, содержащий одну или несколько цифр «2».

3.14. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

3.15. Экзаменационные работы по математике для абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

3.16. На экзамене 25 пронумерованных билетов. Студент Иванов выучил билеты с 1-го по 22-й, а студент Петров с 1-го по 18-й. Найти вероятность сдать экзамен каждым из студентов до начала экзамена. Изменится ли вероятность сдать экзамен для Иванова, если Петров пойдет первым и возьмет «удачный» для себя билет (взятые билеты назад не возвращают)?

3.17. Брошены игральные кости (два шестигранных кубика) и выпало какое-то количество очков в сумме. Найти вероятности следующих событий: A – выпало 4 очка, B – выпало 6 очков, C – выпало 11 очков.

3.18. Группа туристов из 7 юношей и 5 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду из 4 человек. Какова вероятность, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

3.19. В корзине 20 шаров трех цветов: 5 красных, 7 синих и 8 желтых. Не глядя берем 3 шара. Найти вероятности следующих событий: A – взяли 3 красных шара; B – взяли по одному шару красного цвета; C – взяли 1 синий и 2 желтых шара.

3.20. Случайная величина X – количество человек, купивших автомобиль в элитном салоне (в течение нескольких дней), задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,4	0,3		0,1

Найти $p(x = 2)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

3.21. Случайная величина X – количество попаданий биатлониста в мишень при пяти выстрелах задана таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3		0,1

Найти $p(x = 4)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

3.22. Среднесуточная температура воздуха для некоторой местности удовлетворяет следующему закону распределения вероятностей:

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

Найти $M(t)$, $D(t)$ и $\sigma(t)$.

3.23. Случайная величина X – суммарное число очков при бросании игровых костей (двух шестигранных кубиков). Заполнить таблицу распределения вероятностей случайной величины X .

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i											

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

ТЕМА 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные понятия

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений. Одна из основных задач математической статистики – определение способов сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или экспериментов.

Пусть в одинаковых условиях проводится n опытов и пусть в результате этих опытов мы получили $x_1, x_2, \dots, x_n$ данных (в общем случае – случайных величин). Так как проводится один опыт, то эти случайные величины можно считать значениями какой-то одной случайной величины X , которую называют **генеральной совокупностью**. Данные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют **выборкой** из генеральной совокупности. Число данных n – **объем выборки**, $R = x_{\max} - x_{\min}$ – **размах выборки**.

Пример. Путем опроса получены следующие данные о возрасте 25 студентов первого курса: 18, 17, 23, 18, 17, 19, 18, 20, 17, 22, 19, 21, 18, 18, 17, 22, 18, 21, 17, 21, 18, 19, 17, 23, 17. Объем выборки $n = 25$, размах выборки $R = 23 - 17 = 6$.

Первичная обработка выборки

Выборочные значения, записанные в порядке их регистрации, обычно неудобны для дальнейшего анализа, поэтому проводят первичную обработку выборки, которая, обычно, состоит из трех следующих этапов.

1. Упорядочение. Чаще всего выборку упорядочивают по возрастанию: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Такая упорядоченная выборка называется **вариационным рядом**. Например, показанная ранее выборка студентов будет иметь следующий вариационный ряд: 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 23.

2. Частотный анализ. Пусть выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ содержит k ($k \leq n$) различных чисел: $y_1, y_2, \dots, y_k$, причем число y_i встречается n_i раз. Число n_i называется **частотой** элемента выборки y_i . Ясно, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Совокупность пар $(y_i; n_i)$ называется **статистическим рядом (или рядом распределения частот)** выборки. Статистический ряд удобнее всего представлять в виде таблицы, в первой строке которой указываются значения, а во второй – их частоты. Например, для показанной нами выборки из 25 студентов:

y_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2

Отметим, что $7 + 7 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 25$.

Для удобства восприятия статистические данные, обычно, представляются не в абсолютных, а в относительных значениях. Величина v_i (греческая буква «ню»), равная n_i/n , называется **относительной частотой** значения y_i . Ясно, что $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 1$. Совокупность пар $(y_i; v_i)$ называется **рядом распределения относительных частот**. Данный ряд также удобнее представлять в виде таблицы:

y_i	17	18	19	20	21	22	23
v_i	0,28	0,28	0,12	0,04	0,12	0,08	0,08

При этом $0,28 + 0,28 + 0,12 + 0,04 + 0,12 + 0,08 + 0,08 = 1$.

3. Группировка. При очень большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (классы), представляя результаты опытов в виде **группированного статистического ряда**. Для этого интервал, содержащий все значения выборки, разбивают на несколько непересекающихся интервалов. Удобнее разбивать на равные интервалы **длины h** , при этом считается, что правая граница интервала принадлежит следующему. Так, при $h = 2$ значения будут группироваться по 2: в первом интервале 17 и 18, во втором – 19 и 20, в третьем – 21, 22 плюс оставшееся значение 23:

y_i	17–19	19–21	21–23
n_i	14	4	7
v_i	0,56	0,16	0,28

Наглядное изображение выборки

Для наглядного представления выборки из генеральной совокупности используется специальный график – гистограмма. Строится она следующим образом: пусть длина каждого маленького промежутка (интервала) равна h . Построим на i -м промежутке как на основании прямоугольник высотой $\frac{n_i}{h}$.

Ясно, что площадь каждого такого прямоугольника будет равна n_i , а суммарная площадь всех прямоугольников равна n . Построенная гистограмма называется **гистограммой частот**. Если соединить отрезками середины верхних сторон прямоугольников гистограммы, получится – **полигон относительных частот** (рис. 4.1).

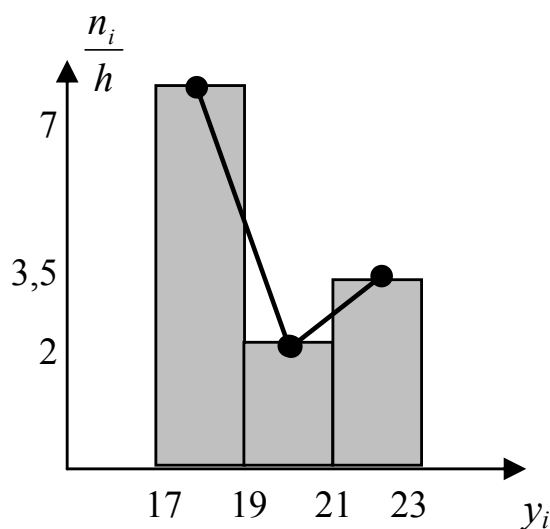


Рис. 4.1.

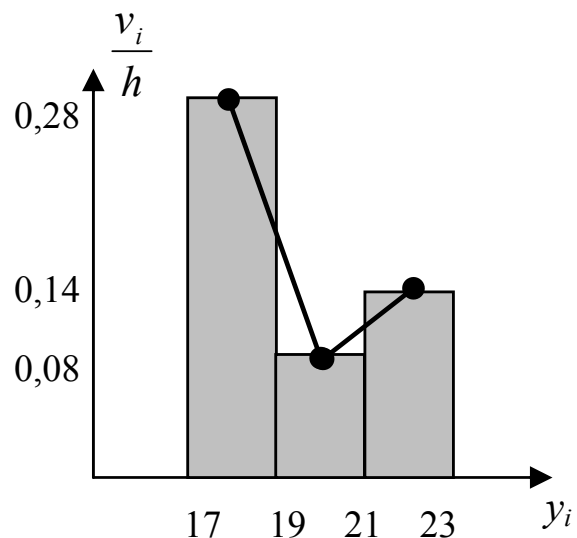


Рис. 4.2.

Аналогично строятся **гистограмма и полигон относительных частот** – высота прямоугольников равна $\frac{v_i}{h}$, а суммарная площадь гистограммы равна 1.

Внешне гистограмма относительных частот отличается от гистограммы частот только высотой прямоугольников, которые в n раз ниже (рис. 4.2).

Точечные оценки числовых параметров распределения

На практике важное значение имеют точечные оценки числовых параметров, которые, фактически, являются среднестатистическими значениями выборки.

Пусть дана некоторая выборка: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда **выборочным средним** называют величину:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n).$$

Если выборка задана рядом распределения частот ($y_i; n_i$):

y_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то для подсчета выборочного среднего приведенную выше формулу можно преобразовать в следующий вид:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (y_1 \cdot n_1 + y_2 \cdot n_2 + y_3 \cdot n_3 + \dots + y_k \cdot n_k).$$

Выборочной дисперсией или мерой рассеяния значений признака X по отношению к его выборочному среднему $\bar{X}$ называют величину:

$$s^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2).$$

Если выборка задана рядом распределения частот ($y_i; n_i$):

y_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то для подсчета выборочной дисперсии приведенную формулу также удобно преобразовать:

$$s^2 = \frac{1}{n} (n_1 (y_1 - \bar{X})^2 + n_2 (y_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_k (y_k - \bar{X})^2).$$

Поскольку дисперсия – величина квадратная, использовать ее на практике неудобно. Поэтому из выборочной дисперсии извлекают корень квадратный и называют новую величину **выборочным средним квадратическим отклонением**: $s = \sqrt{s^2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

(примеры, аналогичные контрольным, отмечены знаком *)

Пример 1^{*}. Имеются данные о количестве студентов, успевающих на «4» и «5», 20 групп некоторого вуза: 10, 12, 11, 15, 15, 9, 12, 14, 16, 13, 12, 13, 11, 17, 15, 16, 14, 13, 14, 14.

Найти объем и размах выборки. Построить ряд распределения частот, ряд распределения относительных частот, группированный статистический ряд, гистограмму и полигон относительных частот.

Решение:

Объем выборки $n = 20$; размах выборки $R = 17 - 9 = 8$.

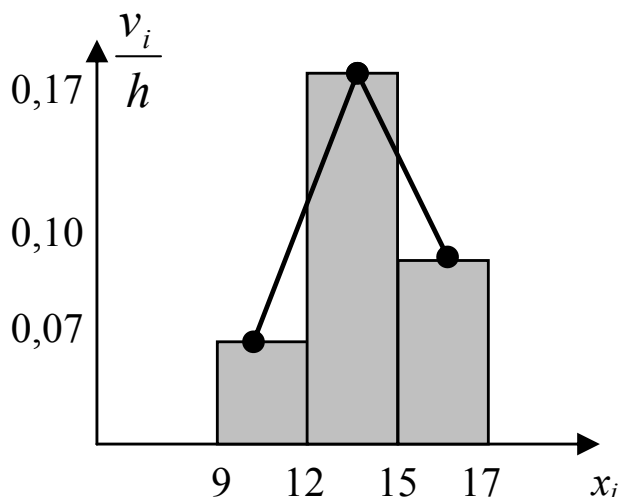
Построим в одной таблице ряд распределения частот и ряд распределения относительных частот:

x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n_i	1	1	2	3	3	4	3	2	1
v_i	0,05	0,05	0,10	0,15	0,15	0,20	0,15	0,10	0,05

Длина интервала по условию не задана. Если принять ее равной трем ($h = 3$), то в каждую группу попадут ровно по три значения: (9; 10; 11), (12; 13; 14) и (15; 16; 17). Построим группированный статистический ряд:

x_i	9–12	12–15	15–17
n_i	4	10	6
v_i	0,20	0,50	0,30

Гистограмма и полигон относительных частот будут выглядеть следующим образом:



Пример 2. Выборка задана рядом распределения частот:

x_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2

Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Поскольку выборка задана статистическим рядом, то для подсчета среднего и дисперсии удобнее воспользоваться преобразованными формулами:

$$\bar{X} = \frac{1}{25} (17 \cdot 7 + 18 \cdot 7 + 19 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 \cdot 2)$$

$$= \frac{475}{25} = 19.$$

$$s^2 = \frac{1}{25} ((17-19)^2 \cdot 7 + (18-19)^2 \cdot 7 + (19-19)^2 \cdot 3 + (20-19)^2 \cdot 1 +$$

$$+ (21-19)^2 \cdot 3 + (22-19)^2 \cdot 2 + (23-19)^2 \cdot 2) = \frac{98}{25} = 3,92.$$

$$s = \sqrt{3,92} = 1,98.$$

Задания для самостоятельного решения

4.1. Имеются данные об итоговой сумме баллов тридцати абитуриентов:

12, 15, 20, 17, 16, 18,
18, 19, 19, 14, 16, 13,
12, 13, 13, 15, 16, 14,
14, 16, 17, 12, 15, 16,
15, 12, 13, 13, 15, 17.

Найти объем выборки, размах выборки. Построить ряд распределения частот, ряд распределения относительных частот, группированный статистический ряд ($h = 3$), гистограмму и полигон относительных частот.

4.2. Имеются данные о количестве студентов в 24 группах:

28, 27, 26, 28, 27, 25, 22, 24,
25, 23, 24, 25, 22, 21, 23, 19,
20, 21, 22, 19, 21, 20, 22, 18.

Найти объем выборки, размах выборки. Построить ряд распределения частот, ряд распределения относительных частот, группированный статистический ряд ($h = 4$), гистограмму и полигон частот.

4.3. Дан ряд распределения учащихся 11 класса по уровням сформированности математических знаний:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	5	7	11	13	8	1	1

Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4.4. Дан ряд распределения студентов 1 курса по размерам обуви:

x_i	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i	3	5	6	13	10	7	4	2

Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Дополнительный материал

ТЕМА Д 1.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И ДЕЛИМОСТЬ В ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВАХ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Системы счисления в множестве натуральных чисел

С практической точки зрения первоочередное значение для числовых множеств имеют операции не между ними, а производимые внутри самих множеств, т. е. действия с числами на заданном числовом множестве. Для этого необходимо установить совокупность правил, по которым будет осуществляться запись чисел, а затем и действия над ними – *систему счисления*.

Выделяют два вида систем счисления – позиционные и непозиционные. *Непозиционными* считают системы счисления, в которых обозначение числа не зависит от позиции знаков (цифр) в записи этого числа.

Например, в римской системе счисления в качестве цифр используются латинские буквы I, V, X, L, C... (обозначающие соответственно 1, 5, 10, 50, 100...), которые в записи числа складываются (в некоторых случаях – вычитаются) вне зависимости от их позиции: $XVIII = 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18$.

В греческой системе счисления для записи цифр использовались буквы греческого алфавита (24 буквы + 3 специальных символа). Первые девять обозначали целые числа от 1 до 9, следующие – 10, 20 и т. д. до 90, последние 100, 200, ..., 900. Таким образом, $\sigma\lambda\zeta = 200 + 30 + 7 = 237$, $\sigma\zeta = 200 + 7 = 207$, $\sigma\lambda = 200 + 30 = 230$. Для того чтобы отличать цифры от слов в текстах, над цифрами ставили вертикальную черту: улж.

Основной недостаток таких систем – трудности при выполнении операций даже с относительно небольшими числами.

Позиционными называют системы счисления, в которых один и тот же знак (одна и та же цифра) может обозначать различные числа в зависимости от положения этого знака в записи числа (т. е. его позиции). Наибольшее распространение получила десятичная система счисления, связанная исторически со счетом на пальцах (двух рук). *Основанием* данной системы

является число 10, т. е. для записи чисел используется 10 знаков (цифры от 0 до 9).

Встречаются и другие позиционные системы счисления – двенадцатеричная (основание – 12), двадцатеричная (основание – 20), шестидесятеричная (основание – 60) и их следы сохранились до сих пор.

Например, в измерениях времени: 1 сутки = 24 часа ($2 \cdot 12$), 1 час = 60 минут, 1 минута = 60 секунд; в системе мер длин: 1 фут = 12 дюймов; в английской денежной системе: 1 фунт стерлингов = 20 шиллингов; 1 шиллинг = 12 пенсов и т. д. Более того, на сегодняшний день широкое распространение получили двоичная (основание – 2), восьмеричная (основание – $8 = 2^3$) и шестнадцатеричная (основание – $16 = 2^4$) системы счисления, которые используются в информатике.

Десятичной записью натурального числа n называется представление в виде суммы следующего вида:

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10^1 + n_0,$$

где $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$ – целые неотрицательные числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Все натуральные числа имеют десятичную запись и только одну. Например:

$$42 = 4 \cdot 10 + 2;$$

$$842 = 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2;$$

$$3842 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2;$$

$$3482 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2.$$

Аналогично десятичной системе, и в других позиционных системах счисления любое натуральное число можно представить единственным образом в виде суммы:

$$n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_1 \cdot p^1 + n_0,$$

где p – основание системы счисления. Например:

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1;$$

$$532_6 = 5 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2;$$

$$5174_8 = 5 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4;$$

$$17B_{16} = 1 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16 + 11.$$

Правила перевода натуральных чисел

В виду многообразия позиционных систем счисления важную роль играет знание правил перевода чисел из одной системы счисления в другую.

1) $x_p \rightarrow y_{10}$

Перевод чисел из p -ичной системы в десятичную.

Для этого число x нужно представить в виде суммы в p -ичной системе счисления и выполнить действия по правилам, принятым в десятичной системе счисления:

$$x_p = x_k \cdot p^k + x_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + x_1 \cdot p^1 + x_0 = y_{10}$$

Например,

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 19.$$

$$5174_8 = 5 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4 = 2684;$$

$$17B_{16} = 1 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16 + 11 = 379.$$

2) $x_{10} \rightarrow y_p$

Перевод чисел из десятичной системы в p -ичную.

Для этого разделим число x на p с остатком. Затем полученное неполное частное снова разделим на p с остатком и т.д. до тех пор, пока в неполном частном не получится 0. Затем запишем все полученные остатки в обратном порядке (начиная с последнего). Например: $379 \rightarrow y_{16}$

379	16	
11	23	16
	7	1
		16
	1	0

$379 = 23 \cdot 16 + 11$
 $23 = 1 \cdot 16 + 7$
 $1 = 0 \cdot 16 + 1$

$$379 = 17B_{16} (A = 10, B = 11 \dots).$$

3) $x_p \rightarrow y_q$

Перевод чисел из p -ичной системы в q -ичную ($p, q \neq 10$).

Для этого, рекомендуем разбить задачу на две части – сначала перевести число x из p -ичной системы в десятичную, а затем из десятичной в q -ичную по указанным выше правилам 1 и 2, т. е. свести задачу к следующей:

$$x_p \xrightarrow{1} z_{10} \xrightarrow{2} y_q$$

3*) Частный случай правила 3, если $p = q^n$

В этом случае перевод из одной системы в другую можно осуществить при помощи таблицы соответствия значений, в которой каждой цифре p -ичной системы будет соответствовать q -ичное число, состоящее из n знаков. Например, поскольку $4 = 2^2$, то таблица будет выглядеть следующим образом:

$p = 4$	0	1	2	3
$q = 2$	00	01	10	11

На основе данных таблицы: $2013_4 = 10\ 00\ 01\ 11_2$

Делимость целых неотрицательных чисел

Понятие делимости чисел непосредственно связано с множеством целых неотрицательных чисел, поскольку подразумевает деление чисел без остатка.

Говорят, что **число a делится на число b** , если существует такое число c , что $a = bc$. В этом случае записывают $a : b$. Например: $8 : 2$, так как существует такое число 4, что $8 = 2 \cdot 4$ и 8 не делится на 3, так как не существует такого целого неотрицательного числа c , что $8 = 3c$.

Приведем некоторые свойства отношения делимости:

- 1) Число 0 делится на любое число.
- 2) Ни одно отличное от нуля число не делится на 0.
- 3) Любое число делится на 1.
- 4) Любое число делится на себя.

Если число a делится на число b , то говорят, что **число b – делитель числа a** или **число a кратно числу b** .

Если целые неотрицательные числа a и b делятся на число c , то c называют **общим делителем** этих чисел. Множество общих делителей чисел a и b является пересечением множества делителей числа a с множеством делителей числа b .

Например, A – множество делителей числа 18. $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 18\}$. B – множество делителей числа 30. $B = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$. Множество общих делителей чисел 18 и 30 $= A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$.

Из множества общих делителей чисел a и b выделяют наибольшее и называют **наибольшим общим делителем** этих чисел. Обозначается: $\text{НОД}(a, b)$ или $D(a, b)$. Например, $\text{НОД}(18, 30) = 6$.

Число m называется **общим кратным** чисел a и b , если оно кратно и числу a , и числу b .

Например, множество A кратных числа $4 = \{4; 8; 12; 16; 20 \dots\}$, множество B кратных числа $6 = \{6; 12; 18; 24 \dots\}$. Множество общих кратных чисел 4 и $6 = A \cap B = \{12; 24; 36 \dots\}$.

Из множества общих кратных чисел a и b выделяют наименьшее и называют **наименьшим общим кратным** этих чисел. Обозначается $НОК(a, b)$ или $K(a, b)$. Например, $НОК(4, 6) = 12$.

Правила нахождения НОД и НОК двух чисел

Правило нахождения НОД(a, b) основано на так называемом «алгоритме Евклида», которое сформулировано ниже.

Пусть даны два натуральных числа a и b , причем $a > b$. Разделим a на b (т. е. большее из этих чисел на меньшее) с остатком, т. е. представим в виде $a = bq_1 + r_1$. Если $r_1 \neq 0$, то делитель b делим на остаток r_1 (т. е. представляем в виде $b = r_1q_2 + r_2$). Если $r_2 \neq 0$, то снова аналогично делитель r_1 делим на остаток r_2 ($r_1 = r_2q_3 + r_3$) и т. д. до тех пор, пока не получим в остатке 0. Последний, отличный от нуля остаток и будет искомым числом.

Для **нахождения НОК(a, b)** можно воспользоваться следующим свойством:

$$НОД(a, b) \cdot НОК(a, b) = a \cdot b.$$

Например, найти НОД и НОК чисел 30 и 18.

Решение: По алгоритму Евклида:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, r_1 \neq 0 & 30 = 18 \cdot 1 + 12 \\ b = r_1q_2 + r_2, r_2 \neq 0 & 18 = 12 \cdot 1 + 6 \\ r_1 = r_2q_3 + 0 & 12 = 6 \cdot 2 + 0 \end{array}$$

Поскольку последний отличный от нуля остаток равен 6, то и $НОД(30, 18) = 6$.

На основании описанного выше свойства:

$$НОК(30, 18) = \frac{30 \cdot 18}{НОД(30 \cdot 18)} = 90.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

Пример 1. Перевести из одной системы счисления в другую: $3243_5 \rightarrow y_7$

Решение: По правилу 3 разобьем задачу на два этапа:

1) $3243_5 \rightarrow z_{10}$

$$3243_5 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = 448.$$

2) $z_{10} \rightarrow y_7$

448		7
0		64
		7
		9
		7
		1
		7
		0

$448 = 64 \cdot 7 + 0$
 $64 = 9 \cdot 7 + 1$
 $9 = 1 \cdot 7 + 2$
 $1 = 0 \cdot 7 + 1$

Записываем все полученные остатки, начиная с последнего, и получаем число 1210_7 (в семеричной системе счисления). Таким образом: $3243_5 = 1210_7$.

Пример 2. Перевести из одной системы счисления в другую: $6207_8 \rightarrow y_2$

Решение: Поскольку $8 = 2^3$, то по правилу 3* можно составить таблицу соответствия между значениями восьмеричной и двоичной систем, при этом каждой цифре восьмеричной системы ставится в соответствие трехзначное двоичное число ($n = 3$):

$p = 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$q = 2$	000	001	010	011	100	101	110	111

На основе данных таблицы: $6207_8 = 110\ 010\ 000\ 111_2$

Пример 3. Найти НОД и НОК следующих чисел: 7975 и 2585.

Решение: По алгоритму Евклида:

$$a = bq_1 + r_1, r_1 \neq 0 \quad 7975 = 3 \cdot 2585 + 220$$

$$b = r_1q_2 + r_2, r_2 \neq 0 \quad 2585 = 11 \cdot 220 + 165$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, r_3 \neq 0 \quad 220 = 1 \cdot 165 + 55$$

$$r_2 = r_3q_4 + 0 \quad 165 = 3 \cdot 55$$

$$\text{НОД}(7975, 2585) = 55.$$

На основании свойства:

$$НОК(7975, 2585) = \frac{7975 \cdot 2585}{НОД(7975 \cdot 2585)} = 145 \cdot 2585 = 374825.$$

Задания для самостоятельного решения

Д 1.1. Перевести из одной системы счисления в другую:

а) $317_9 \rightarrow x_6$; б) $115_7 \rightarrow x_4$; в) $2134_5 \rightarrow x_8$; г) $1022_3 \rightarrow x_9$.

Д 1.2. Осуществить перевод в 8-ричную, а затем 2-ичную системы:

а) 5783; б) 12923; в) 48291; г) 509111.

Д 1.3. Перевести из одной системы счисления в другую:

а) $13422_5 \rightarrow x_8 \rightarrow y_2$; б) $3154_6 \rightarrow x_8 \rightarrow y_2$;

в) $2434_5 \rightarrow x_8 \rightarrow y_2$; г) $4615_7 \rightarrow x_8 \rightarrow y_2$.

Д 1.4. Выполнить действия и записать ответ в десятичной системе счисления:

а) $1317_8 + 1101101_2 \cdot 92A_{16}$;

б) $1101101_2 \cdot 664_8 - BF1_{16}$.

Д 1.5. Найти *НОД* и *НОК* следующих чисел:

а) 846 и 246; б) 1960 и 588;

в) 780 и 1380; г) 492 и 697;

д) 481 и 1628; е) 2838 и 1505.

Д 1.6. Сократить дробь:

а) $\frac{675}{960}$; б) $\frac{6570}{18432}$; в) $\frac{30720}{2055}$; г) $\frac{39424}{3157}$.

ТЕМА Д 2. СООТВЕТСТВИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, ФУНКЦИИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Бинарные соответствия

Теория множеств изучает свойства множеств и операций над ними, отвлекаясь от природы элементов этих множеств и от способа их задания. Чтобы можно было применять теорию множеств к решению практических задач, а также для построения математических теорий, надо рассматривать множества, между элементами которых определены те или иные отношения.

Пример. Пусть даны два множества $X = \{2; 3; 6\}$ и $Y = \{1; 4; 6; 8\}$ и пусть $x \in X$, $y \in Y$. Для различных элементов данных множеств могут быть справедливы следующие утверждения: « $x > y$ », « $x < y$ », « $x = y$ », ...

Бинарным соответствием R между множествами X и Y называют тройку множеств (X, Y, Γ) , где X – область отправления соответствия; Y – область прибытия соответствия; Γ – график соответствия.

Если множества X и Y конечны, то соответствия между ними можно задать в виде таблиц или ориентированных графов (особых чертежей, состоящих из точек и стрелок).

Пример. Множество $X = \{\text{Андреева; Иванов; Калинина; Лазарева; Петров; Сидоров}\}$. Множество $Y = \{\text{первая парта; вторая парта; третья парта}\}$. Соответствие R : «Студент x сидит за партой y ». Заштрихованные клетки образуют график данного соответствия.

	Первая парта	Вторая парта	Третья парта
Андреева			
Иванов			
Калинина			
Лазарева			
Петров			
Сидоров			

При задании соответствия с помощью ориентированных графов, элементы множеств X и Y обозначают точками, а стрелки проводят из точек множества X в точки множества Y согласно графику соответствия (рис. Д 2.1).

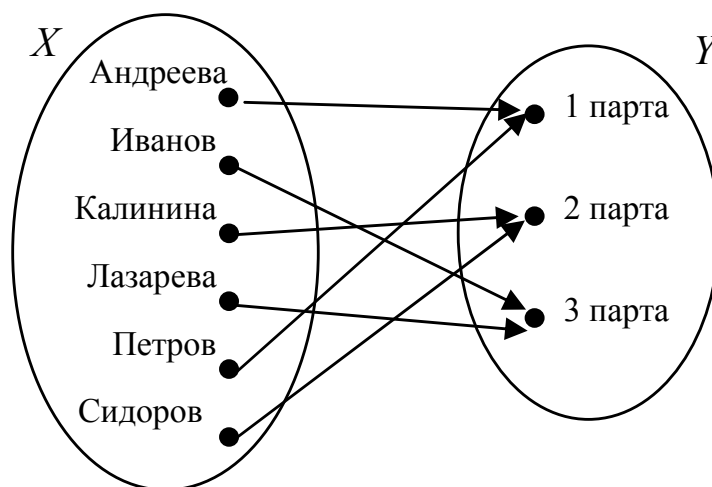


Рис. Д 2.1

Отображения

Рассмотрим граф некоторого соответствия между множествами X и Y (рис. Д 2.2.). Возьмем какую-нибудь точку множества X , например a , и все стрелки, выходящие из этой точки. Множество концов этих стрелок называют **образом элемента a** при соответствии R и обозначают $R(a)$, т. е. $R(a) = \{t; x; y\}$.

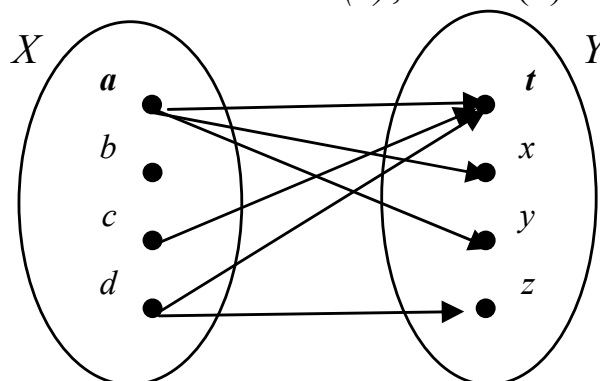


Рис. Д 2.2

Возьмем теперь какой-нибудь элемент из множества Y , например t , и все стрелки, которые оканчиваются в этом элементе. Множество начал этих стрелок называют **полным прообразом элемента t** при соответствии R и обозначают $R^{-1}(t)$, т. е. $R^{-1}(t) = \{a; c; d\}$.

Отображением множества X в множество Y называют такое соответствие между этими множествами, что образ любого элемента $a \in X$ состоит из одного и только одного элемента множества Y . Отображение является одним из наиболее важных частных случаев бинарного соответствия.

На ориентированном графе отображение будет выглядеть следующим образом: из каждой точки множества X будет выходить одна и только одна стрелка. Например, соответствие, изображенное на рис. Д 2.1 является отображением, а на рис. Д 2.2 – нет (из точек a и d выходит более одной стрелки, а из точки b – ни одной стрелки).

Отображения множеств обычно обозначают так:

$$f : X \rightarrow Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y.$$

Виды отображений:

1) Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется **сюрьективным**, если $f(X) = Y$. На графе сюрьективного отображения в каждую точку множества Y обязательно входит хотя бы одна стрелка (рис. 3.3).

2) Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется **инъективным**, если каждому элементу $y \in f(X)$ соответствует один и только один элемент $x \in X$. На графе инъективного отображения в каждую точку множества Y может входить не более одной стрелки (рис. 3.4).

3) Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется **биективным** (или взаимно-однозначным), если оно является сюрьективным и инъективным.

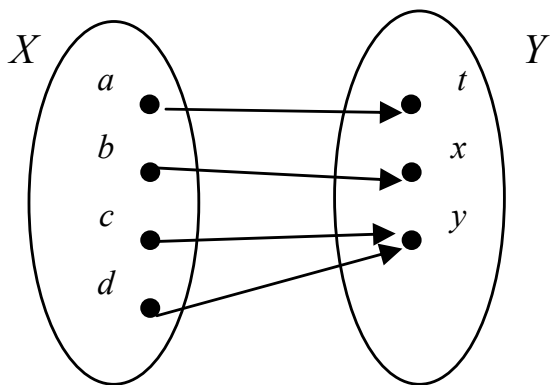


Рис. Д 2.3

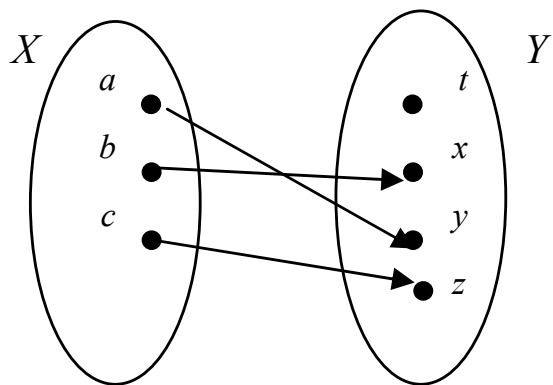


Рис. Д 2.4

Числовые функции

Пусть дано числовое множество $X \subset \mathbb{R}$. **Числовой функцией** называют отображение $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ и обозначают $y = f(x)$. Другими словами, каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое число $y = f(x)$. Множество X называют **областью определения** функции, а элемент $x \in X$ – **аргументом** функции. Множество $Y = f(X)$ называют **множеством значений** функции.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество пар $(x; y)$ таких, что $x \in X$, а $y = f(x)$. Каждой такой паре соответствует точка M на координатной плоскости, имеющая координаты $(x; f(x))$. Обычно график функции изображается некоторой линией на координатной плоскости (рис. Д 2.5). Однако не всякая линия может служить графиком функции, поскольку на каждой прямой, параллельной оси Oy , может лежать не более одной точки графика функции. Поэтому, например, окружность не является графиком какой-либо функции (рис. Д 2.6).

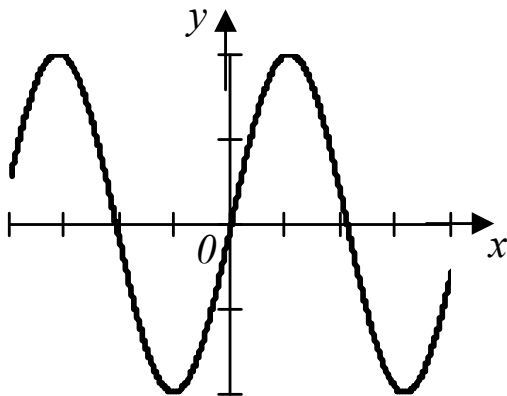


Рис. Д 2.5
График функции $y = \sin(x)$

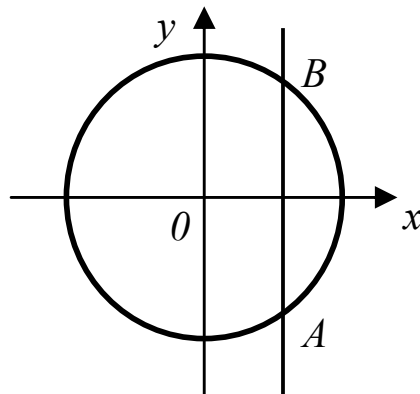


Рис. Д 2.6
Окружность

Основные виды числовых функций

1. Прямая пропорциональность

Функция вида $y = kx$, где $k \neq 0$, называется прямой пропорциональностью, k – коэффициент пропорциональности. Для нахождения k достаточно знать одну пару значений $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$.

Тогда $k = \frac{y_0}{x_0}$. Графиком данной функции является прямая,

проходящая через начало координат, причем коэффициент пропорциональности k совпадает с угловым коэффициентом графика функции $y = kx$ (рис. Д 2.7).

2. Линейная функция

Функция вида $y = kx + b$, где $k \neq 0$, называется линейной функцией, k – коэффициент пропорциональности, b – свободный коэффициент. Для нахождения k достаточно знать две пары значений $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Графиком данной

функции является прямая линия, проходящая через точку $(0; b)$ (рис. Д 2.8). Фактически, прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции (когда $b = 0$).

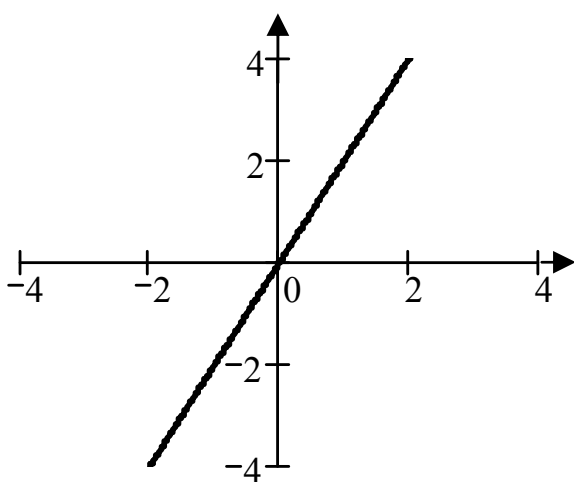


Рис. Д 2.7
График функции $y = 2x$

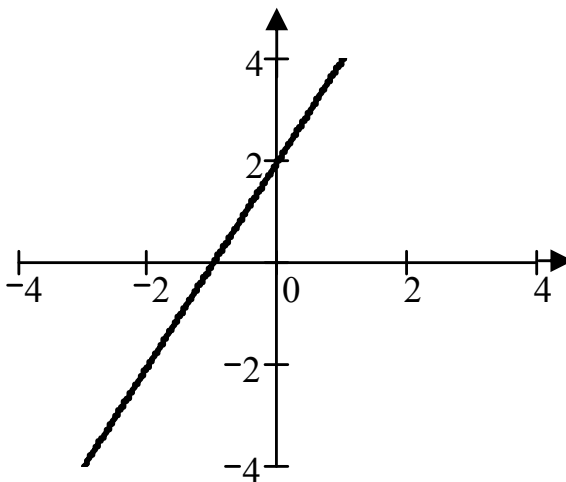


Рис. Д 2.8
График функции $y = 2x + 2$

3. Обратная пропорциональность

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется обратной пропорциональностью, k – коэффициент пропорциональности. Для нахождения k достаточно знать одну пару значений $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$. Тогда $k = x_0 \cdot y_0$. Графиком данной функции является гипербола, причем если $k > 0$, то ее ветви находятся в I и III четвертях, а если $k < 0$, то во II и IV четвертях (рис. Д 2.9).

Оси координат являются горизонтальной и вертикальной асимптотами графика функции (т. е. ветви гиперболы стремятся к ним, но никогда их не коснутся).

4. Квадратичная функция

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратичной функцией, a , b и c – коэффициенты. Графиком данной функции является парабола, причем если $a > 0$, то ее ветви направлены вверх, а если $a < 0$, то вниз (рис. Д 2.10). Точка O_1 с координатами $(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a})$ является вершиной параболы.

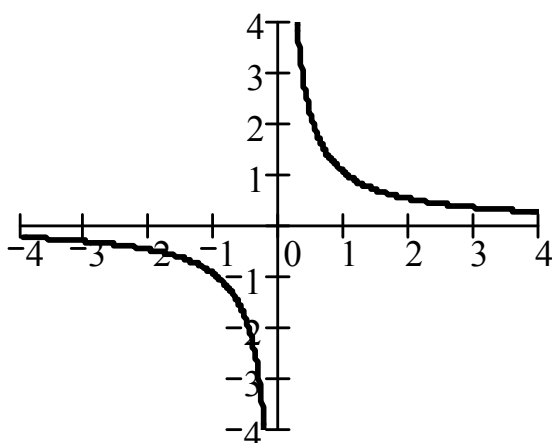


Рис. Д 2.9
График функции $y = 1/x$

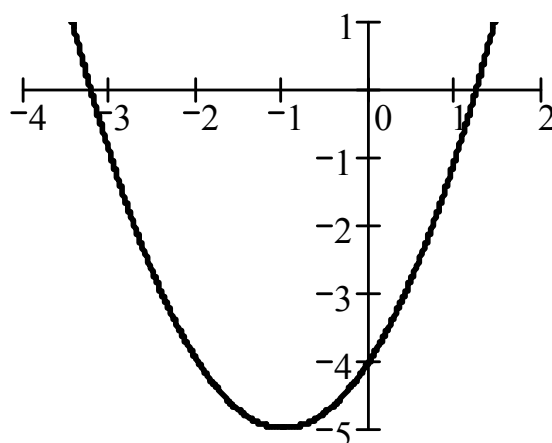


Рис. Д 2.10
График функции $y = x^2 + 2x - 4$

5. Дробно-линейная функция

Функция вида $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$, называется дробно-линейной функцией, a , b , c и d – коэффициенты. Графиком данной функции является гипербола (рис. Д 2.11). Точка O_1 с координатами $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ является точкой пересечения асимптот графика.

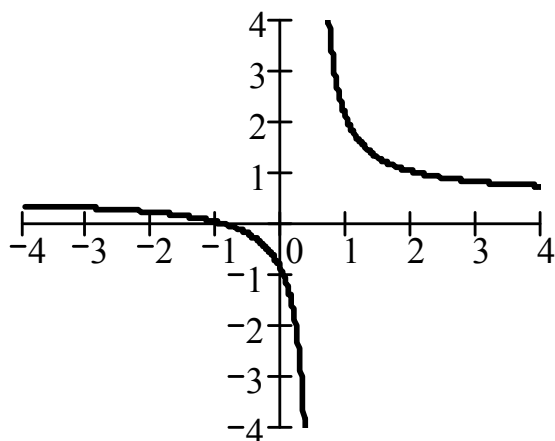


Рис. Д 2.11. График
функции $y = \frac{2x + 2}{4x - 2}$

Основные способы построения графиков функций

1) Построение графика «по точкам»

Поскольку график функции $y = f(x)$ обычно состоит из бесконечного множества точек, то нельзя изобразить его точно, а можно лишь сделать эскиз такого графика.

Для построения графика «по точкам» рекомендуется выполнить следующие действия:

- построить и обозначить координатные оси, указать точку начала координат и единичные отрезки на обеих осях;
- отыскать несколько точек, принадлежащих этому графику и достаточных для построения «эскиза» (при этом предварительно составить таблицу значений функции);
- соединить точки достаточно гладкой линией.

2) Построение графика путем параллельного переноса.

Часто можно построить график функции путем параллельного переноса уже известного графика. Рассмотрим следующие примеры.

а) График любой *квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$, можно построить из графика функции $y = ax^2$. Для этого необходимо:

- построить (по точкам или на основе свойств) параболу $y = ax^2$;
- перенести полученный график так, чтобы точка $O (0; 0)$

перешла в точку $O_1 (-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a})$.

б) График любой *дробно-линейной функции* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ можно построить из графика функции $y = \frac{k}{x}$. Для этого необходимо:

- построить (по точкам или на основе свойств) гиперболу $y = \frac{k}{x}$, где $k = \frac{bc - ad}{c^2}$;
- перенести полученный график так, чтобы точка $O(0; 0)$ перешла в точку $O_1\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

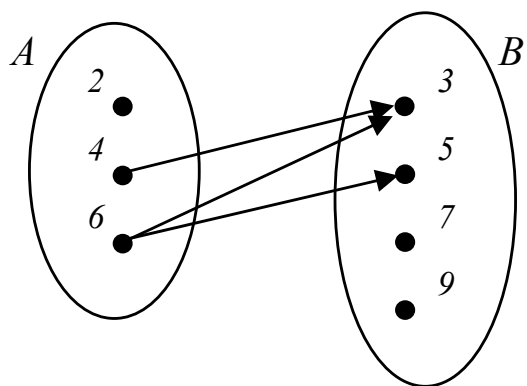
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

Пример 1. Даны два множества: $A = \{2; 4; 6\}$ и $B = \{3; 5; 7; 9\}$. Между ними установлено соответствие R : « $a > b$ », $a \in A$, $b \in B$. Задать соответствие R в виде таблицы и в виде ориентированного графа.

Решение:

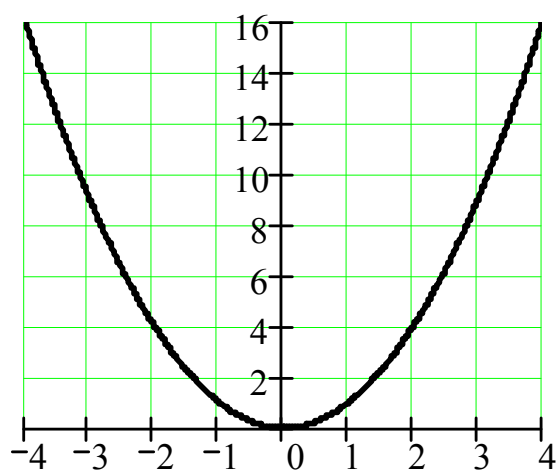
$A \backslash B$	3	5	7	9
2				
4				
6				



Пример 2. Построить график функции $y = x^2$ «по точкам».

Решение:

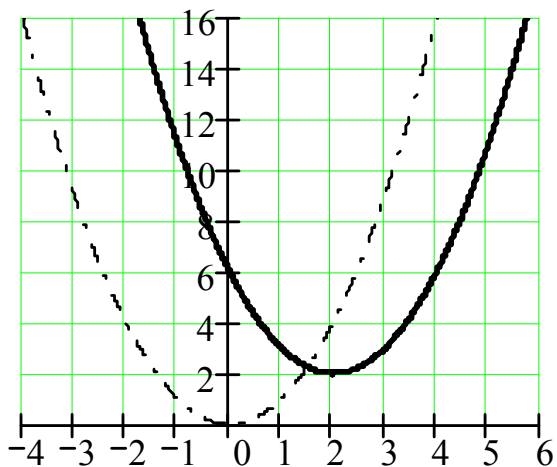
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16



Пример 3. Построить график квадратичной функции $y = x^2 - 4x + 6$ путем параллельного переноса.

Решение:

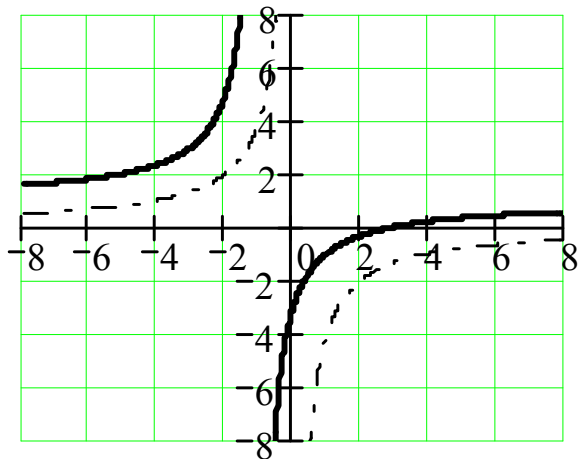
- построим график функции $y = x^2$ (по точкам);
- переносим полученный график так, чтобы точка $O(0; 0)$ перешла в точку $O_1(2; 2)$.



Пример 4. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{x-3}{x+1}$ путем параллельного переноса.

Решение:

- построим гиперболу $y = \frac{-4}{x}$ (по точкам);
- перенесем полученный график так, чтобы точка $O(0; 0)$ перешла в точку $O_1(-1; 1)$.



Задания для самостоятельного решения

Д 2.1. Для множеств X и Y задать соответствие R в виде таблицы и в виде ориентированного графа:

а) $X = \{1; 3; 5; 7\}$, $Y = \{2; 4; 6; 8\}$, $R: \langle x \leq y \rangle$, $x \in X, y \in Y$.

б) $X = \{11; 10; 9; 8\}$, $Y = \{9; 5; 11; 12; 10\}$, $R: \langle x = y \rangle$, $x \in X, y \in Y$.

в) $X = \{5; 15; 18; 4; 10; 13\}$, $Y = \{6; 4; 5; 10; 8; 9\}$, $R: \langle x \dot{=} y \rangle$, где $x \in X, y \in Y$.

г) $X = \{27; 18; 3; 1; 4\}$, $Y = \{44; 18; 1; 12; 14\}$, $R: \langle x > y \rangle$, где $x \in X, y \in Y$.

Д 2.2. Построить график функции «по точкам»:

а) $y = 3x - 4$; б) $y = -2x^2 + 8$; в) $y = -\frac{4}{x}$; г) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Д 2.3. Построить график квадратичной функции путем параллельного переноса:

а) $y = 2x^2 + 8x + 3$; б) $y = -2x^2 - 4x + 8$;

в) $y = x^2 - 8x + 12$; г) $y = -2x^2 + 5x$;

д) $y = -2x^2 + 8x + 3$; е) $y = -x^2 + 4x - 6$.

Д 2.4. Построить дробно-линейной функции путем параллельного переноса:

а) $y = \frac{x+4}{2x+3}$; б) $y = \frac{3x-4}{2x-2}$;

в) $y = \frac{4}{2x-10}$; г) $y = \frac{2x-4}{x+1}$.

ТЕМА Д 3. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Случайные события. Сумма и произведение событий

Суммой событий A и B называется событие, в результате которого происходит или событие A , или событие B (или оба эти события). Обозначается: $A + B$.

Пример. Испытание – стрельба из оружия (2 раза). A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле ($A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах).

Свойства суммы событий:

- 1) если A и B – несовместны, то $p(A + B) = p(A) + p(B)$;
- 2) если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то $p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$;
- 3) если полную группу образуют только два единственно возможных события, то их называют **противоположными** и обозначают A и $\bar{A}$. При этом очевидно, что: $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Произведением событий A и B называется событие, в результате которого одновременно происходит и событие A , и событие B (обозначается: $A \cdot B$).

Пример. Испытание – проверка деталей. A – деталь стандартной формы, B – деталь окрашенная. $A \cdot B$ – деталь стандартная и окрашенная, $\bar{A} \cdot B$ – деталь нестандартная и окрашенная и т. п.

Случайные события. Условная вероятность

Иногда в практических задачах, при последовательном вычислении вероятностей двух или более событий, на последующие события могут накладываться дополнительные условия.

Условной вероятностью $p(B/A)$ называют вероятность события B при условии, что событие A уже произошло. В этом случае говорят, что события A и B **зависимы друг от друга**.

Пример. В коробке 5 белых и 5 черных шаров. Наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно, затем извлекают другой. Найти вероятность событий: A – первый извлеченный шар белого цвета; B – первый извлеченный шар черного цвета; C – второй извлеченный шар черного цвета.

Решение: $p(A) = 5/10 = 0,5$;

$p(B) = p(A) = 5/10 = 0,5$;

$p(C/A) = 5/9 = 0,56$ (так как белых шаров меньше на 1);

$p(C/B) = 4/9 = 0,44$ (так как черных шаров меньше на 1).

Если появление события A не изменяет вероятности события B , то события A и B называют **независимыми**.

Пример. В коробке 5 белых и 5 черных шаров. Наудачу извлекают один шар, и возвращают обратно, затем извлекают другой. Найти вероятность событий: A – первый извлеченный шар белого цвета; B – первый извлеченный шар черного цвета; C – второй извлеченный шар черного цвета.

Решение: $p(A) = p(B) = p(C) = 5/10 = 0,5$.

Свойства произведения событий (теорема умножения):

1) Если события A и B являются зависимыми, то

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A).$$

2) Если события A и B являются независимыми, то

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B).$$

Пример. Имеется 25 экзаменационных билетов. Из них 5 – «счастливых» (все студенты уверены, что вытащив их, сдадут экзамен). Два студента сдают экзамен. У кого из них до начала экзамена вероятность вытащить «счастливый» билет (фактически – сдать экзамен) больше у того, кто идет первым или вторым?

Решение: Пусть A – первый студент вынул «счастливый» билет, $\bar{A}$ – первый студент вынул «несчастливый» билет, B – второй студент вынул «счастливый» билет.

$$p(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

У студента, который планирует идти вторым, до начала экзамена два варианта развития событий: либо первый студент вытянет «счастливый» билет, либо нет.

Следовательно: $B = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$,

$$p(B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{24} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, вероятность до начала экзамена у обоих студентов одинакова.

Случайные величины.

Ковариация и коэффициент корреляции

Ранее мы определили характеристики положения и разброса случайной величины – математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение (тема 3). Теперь введем величину, характеризующую связь между двумя случайными величинами.

Ковариацией двух случайных величин X и Y называется число: $cov(X, Y) = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]$ или $cov(X, Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$.

Размерность ковариации равна произведению размерностей случайных величин X и Y . Чтобы получить безразмерную характеристику зависимости, ковариацию делят на произведение средних квадратических отклонений X и Y . Полученное число называется **коэффициентом корреляции** между случайными величинами X и Y :

$$r_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Ковариация и коэффициент корреляции позволяют достаточно хорошо охарактеризовать степень зависимости между двумя случайными величинами X и Y :

- если $r_{X,Y} = 0$ (т. е. $cov(X, Y) = 0$), то X и Y – независимы;
- если $r_{X,Y} \neq 0$ (т. е. $cov(X, Y) \neq 0$), то X и Y – зависимы;
- если $r_{X,Y} = \pm 1$, то X и Y – линейно зависимы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Примеры решения задач

Пример 1. В двух коробках лежат карандаши разного цвета: в 1-й – 4 красных, 6 черных; во 2-й – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок наудачу выбирается по одному карандашу. Какова вероятность того, что оба карандаша окажутся красными?

Решение: Событие A – карандаш, вынутый из 1-й коробки, – красный, $p(A) = 0,4$; B – карандаш, вынутый из 2-й коробки, – красный, $p(B) = 0,3$. $A \cdot B$ – оба вынутых карандаша – красные. События A и B – независимы, поэтому $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$.

Пример 2. Студент берет билет 2 раза из 34 предлагаемых на экзамене. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он подготовил 30 билетов и первый раз вынул «неудачный» билет (билет, ответ на который не знает).

Решение: Пусть A – первый раз вынут «неудачный» билет, B – второй раз вынут «удачный» билет. События A и B – зависимы. $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33} \approx 0,107$.

Пример 3. Найти ковариацию случайных величин X и Y , если они заданы таблицами распределения:

x_i	-1	0	1
p_i	$0,1$	$0,4$	$0,5$

y_i	-1	0	1
p_i	$0,5$	$0,2$	$0,3$

Решение: $cov(X, Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$.

$M(X) = 0,4$; $M(Y) = -0,2$; Зададим XY :

$x_i y_i$	-1	0	1
p_i	$0,28$	$0,52$	$0,2$

(произведение -1 получается в двух случаях, когда $x = -1$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = -1$, $p(-1) = 0,1 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,28$, остальные вероятности – аналогично).

$M(X \cdot Y) = -0,08$. $cov(X, Y) = -0,08 - 0,4 \cdot (-0,2) = 0$.

Таким образом, X и Y – независимы.

Задания для самостоятельного решения

Д 3.1. На экзамене студенту необходимо ответить на один из 26 теоретических вопросов, решить одну из 13 задач и выполнить одно из 5 индивидуальных заданий. Студент подготовил 22 теоретических вопроса, разобрал решение 10 задач и 4 индивидуальных заданий.

Найти вероятности следующих событий:

а) студент ответил на вопрос, решил задачу и выполнил индивидуальное задание;

б) студент ответил на вопрос, не решил задачу, но выполнил индивидуальное задание;

в) студент не ответил на вопрос, но решил задачу и выполнил индивидуальное задание.

Д 3.2. Вероятность решения студентом контрольной работы равна 0,8. Если контрольная решена, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Если контрольная не решена, то студент также допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,5. Найти вероятности следующих событий:

а) студент решил контрольную и сдал экзамен;

б) студент решил контрольную, но не сдал экзамен;

в) студент не решил контрольную, но сдал экзамен;

г) студент не решил контрольную и не сдал экзамен.

Образуют ли перечисленные события полную группу?

Д 3.3. Найти ковариацию и коэффициент корреляции для случайных величин X и Y , заданных следующими таблицами распределения:

а)

x_i	-1	0
p_i	$0,7$	$0,3$

y_i	1	2
p_i	$0,4$	$0,6$

б)

x_i	0	1	2
p_i	$0,6$	$0,1$	$0,3$

y_i	0	1	2
p_i	$0,4$	$0,5$	$0,1$

Материал для преподавателя

ОСНОВНОЙ КУРС

Основной курс опирается только на базовый материал пособия и позволяет организовать обучение математике при минимальной **трудоемкости – 2 зачетные единицы**. Формой итогового контроля является зачет, который входит в общую трудоемкость дисциплины.

Преподавателям рекомендуется проводить зачет по результатам текущего контроля, например, выполнения двух контрольных работ в течение семестра.

Распределение часов по темам и видам занятий

№ темы	Тема	Всего	Аудиторные		Самост. работа
			Лекц.	Практ.	
1	Множества и операции над ними	24	4	8	12
2	Высказывания и операции над ними	12	2	4	6
3	Элементы теории вероятностей	24	4	8	12
4	Элементы математической статистики	12	2	4	6
	Всего:	72	12	24	36

Организация текущего контроля

Рекомендуется проведение первой контрольной работы по итогам прохождения тем 1–2, а второй – по итогам прохождения тем 3–4. Содержание заданий, методика их оценки, а также примерные контрольные работы приведены ниже.

Содержание заданий контрольных работ

Контрольная работа № 1

- 1.1. Найти объединение, пересечение и разность двух множеств.
- 1.2. Построить заданные множества на диаграммах Эйлера-Венна.
- 1.3. Составить таблицу истинности для формулы.
- 1.4. Доказать равенство или тавтологию.

Контрольная работа № 2

- 2.1. Решить комбинаторную задачу.
- 2.2. Найти вероятности заданных событий.
- 2.3. Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти $p(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
- 2.4. Задана выборка. Найти ее объем и размах. Провести первичную обработку выборки. Построить гистограмму и полигон частот или относительных частот.

Рекомендуемая методика оценки контрольных работ

Контрольная работа № 1

№ зад.	Макс. балл	Методика подсчета
1.1	12	По 1,5 балла за каждое правильно выполненное действие: а) 4х1,5; б) 4х1,5
1.2	12	По 1,5–2 балла за каждое правильно расположенное множество (при 8–6 множествах соответственно)
1.3	16	По 4 балла за каждое правильно выполненное промежуточное действие (при 4 действиях)
1.4	10	По 2 балла за каждое правильно выполненное промежуточное действие (при 4 действиях), 2 балла за правильный вывод

Максимум за контрольную работу № 1 – 50 баллов.

Контрольная работа № 2

№ зад.	Макс. Балл	Методика подсчета
2.1	10	Как правило: 10 (верно) или 0 (неверно). Промежуточные баллы возможны только при наличии рассуждений
2.2	12	По 4 балла за вероятность каждого события (при 3 событиях)
2.3	12	2 балла за $p(x)$; 5 баллов за $M(X)$; 5 баллов за $D(X) + \sigma(X)$
2.4	16	1 балл за нахождение объема и размаха выборки; 10 баллов за обработку выборки; 5 баллов за гистограмму и полигон

Максимум за контрольную работу № 2 – 50 баллов.

Максимум за обе контрольные работы – 100 баллов.

Подведение итогов

Зачет проводится по итогам выполнения двух контрольных работ. При этом, отметку «зачтено» рекомендуется выстав-
лять студенту при выполнении им следующих условий:

- 1) результат каждой из контрольных работ студента должен быть не менее 20 баллов;
- 2) сумма баллов студента, полученная им за обе контрольные работы, должна превышать 60 баллов.

Примерные контрольные работы

Контрольная работа № 1

1.1. Найти объединение, пересечение и разность множеств:

а) $A = \{5; 15; 18; 4; 10; 13\}$, $B = \{6; 4; 5; 10; 8; 9\}$;

б) $A = \{к; о; р; п; у; с\}$, $B = \{о; с; ё; т; р\}$.

1.2. Даны множества: U – города мира; A – города Европы; B – города России; C – Лондон; D – Москва; E – Челябинск; F – Нью-Йорк. Построить данные множества на диаграммах Эйлера-Венна.

1.3. Составить таблицу истинности для следующей формулы:

$$(C \Leftrightarrow A) \Rightarrow \overline{B \wedge C}.$$

1.4. Доказать следующее равенство:

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) = A \Leftrightarrow B.$$

Контрольная работа № 2

2.1. Агентство предлагает совершить поездку по 5 различным странам Западной Европы (15). Сколькими способами можно выбрать страны?

2.2. В денежной лотерее 10000 билетов. Из них, выигрышные: 10 руб. – 2000 шт., 50 руб. – 1000 шт., 100 руб. – 200 шт., 500 руб. – 100 шт., 1000 руб. – 20 шт.

Найти вероятности следующих событий:

A – получен выигрыш 100 руб.;

B – получен выигрыш не менее 100 руб.;

C – получен любой выигрыш.

2.3. Случайная величина X – количество попаданий стрелка в мишень при 3 выстрелах задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2		0,3

Найти $p(x = 2)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$

2.4. Имеются данные о количестве студентов, сдавших зачет по математике, в 20 группах: 10, 12, 11, 15, 12, 12, 14, 16, 13, 12, 13, 11, 17, 15, 16, 14, 13, 14, 18, 13. Найти объем и размах выборки. Построить ряд распределения частот, ряд распределения относительных частот, группированный статистический ряд ($h = 3$), гистограмму и полигон частот.

Пример синхронной поддержки лекции с помощью слайдов

Тема 4. «Элементы математической статистики»

- 1

**Элементы
математической
статистики**
- 2

Проводится n опытов
Получили данные:
 $x_1, x_2, \dots, x_n$
- 3

X –
генеральная
совокупность
- 4

$x_1, x_2, \dots, x_n$ –
выборка
- 5

n –
объем выборки
- 6

$R = x_{\max} - x_{\min}$
размах выборки
- 7

Выборка:
36, 37, 38, 37, 37,
36, 38, 39, 35, 37,
38, 39, 38, 40, 36,
35, 37, 37, 38, 36.
- 8

Объем выборки:
 $n = 20$
Размах выборки:
 $R = 40 - 35 = 5$

9

Первичная обработка
выборки:

1. Упорядочение

10

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ -
Вариационный ряд

11

Выборка:
35, 35, 36, 36, 36,
36, 37, 37, 37, 37,
37, 37, 38, 38, 38,
38, 38, 39, 39, 40.

12

Первичная обработка
выборки:

2. Частотный анализ

13

Выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$
содержит k различных чисел:
 $y_1, y_2, \dots, y_k$

14

Элемент y_i встречается n_i раз
 n_i —
частота элемента y_i

15

Совокупность пар $(y_i; n_i)$ —
Статистический ряд
(ряд распределения частот)

16

y_i	35	36	37	38	39	40
n_i	2	4	6	5	2	1

17

$v_i = n_i/n$ -
Относительная
частота элемента y_i

18

Совокупность пар $(y_i; v_i)$ –
Ряд распределения
относительных
частот

19

y_i	35	36	37	38	39	40
n_i	2	4	6	5	2	1
v_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

20

Первичная обработка
выборки:

3. Группировка

21

Группированный
статистический ряд

22

h –
Длина интервала

23

y_i	35-37	37-39	39-40
n_i	6	11	3
v_i	0,3	0,55	0,15

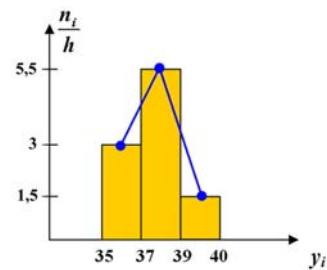
24

$\frac{n_i}{h}$ –
 h Высота
прямоугольника

25

**Гистограмма и
полигон
частот**

26



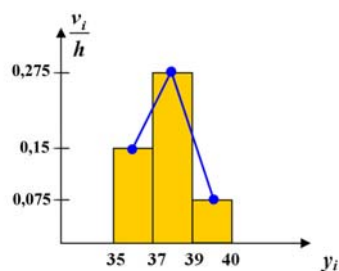
27

**Гистограмма и
полигон
относительных
частот**

28

$\frac{v_i}{h}$ —
**Высота
прямоугольника**

29



30

**Точечные оценки
числовых
параметров**

31

Выборка:
 $x_1, x_2, \dots, x_n$

32

**Выборочное
среднее**

33

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

34

y_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

35

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(y_1 n_1 + y_2 n_2 + \dots + y_k n_k)$$

36

**Выборочная
дисперсия**

37

$$s^2 = \frac{1}{n}((x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2)$$

38

$$s^2 = \frac{1}{n}(n_1(y_1 - \bar{X})^2 + n_2(y_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_k(y_k - \bar{X})^2)$$

39

**Выборочное
среднее
квадратическое
отклонение**

40

$$S = \sqrt{s^2}$$

РАСШИРЕННЫЙ КУРС

Расширенный курса описается как на базовый, так и на дополнительный материал пособия. **Трудоемкость составляет 3 зачетные единицы**, при условии проведения зачета (входящего в общую трудоемкость дисциплины). Если формой итогового контроля является экзамен, то он выражается еще одной **четвертой зачетной единицей** (из расчета три дня на подготовку студентов и один день на проведение экзамена).

Преподавателям рекомендуется проводить зачет по результатам текущего контроля (контрольных работ), аналогично методике, описанной в базовом курсе.

В случае проведения семестрового экзамена баллы, полученные за контрольные работы, дополняются оценкой ответа студента на теоретические вопросы, предложенные ниже.

Распределение часов по темам и видам занятий

№ темы	Тема	Всего	Аудиторные		Самост. работа
			Лекц.	Практ.	
1	Множества и операции над ними	24	4	8	12
Д 1	Системы счисления и делимость в числовых множествах	12	2	4	6
Д 2	Соответствия, отображения, функции	18	3	6	9
2	Высказывания и операции над ними	12	2	4	6
3, Д 3	Элементы теории вероятностей	30	5	10	15
4	Элементы математической статистики	12	2	4	6
	Всего:	108	18	36	54

Организация текущего контроля

Проведение первой контрольной работы планируется после прохождения тем 1, Д 1 и Д 2, а второй – после прохождения тем 2, 3, Д 3, 4. Ввиду увеличения трудоемкости курса в целом, число заданий в каждой контрольной работе также пропорционально увеличено (с четырех до шести).

Контрольная работа № 1

1.1. Найти объединение, пересечение и разность двух множеств.

1.2. Построить заданные множества на диаграммах Эйлера-Венна.

1.3. Перевести число из одной системы счисления в другую.

1.4. Найти НОД и НОК двух заданных чисел.

1.5. Задать соответствие R в виде таблицы и в виде ориентированного графа.

1.6. Построить графики квадратичной и дробно-линейной функций путем параллельного переноса.

Максимум за контрольную работу № 1 – 50 баллов.

Контрольная работа № 2

2.1. Составить таблицу истинности для формулы.

2.2. Доказать равенство или тавтологию.

2.3. Решить комбинаторную задачу.

2.4. Найти вероятности заданных событий.

2.5. Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти $p(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

2.6. Задана выборка. Найти ее объем и размах. Провести первичную обработку выборки. Построить гистограмму и полигон частот или относительных частот.

Максимум за контрольную работу №2 – 50 баллов.

Максимум за обе контрольные работы – 100 баллов.

Теоретические вопросы к экзамену

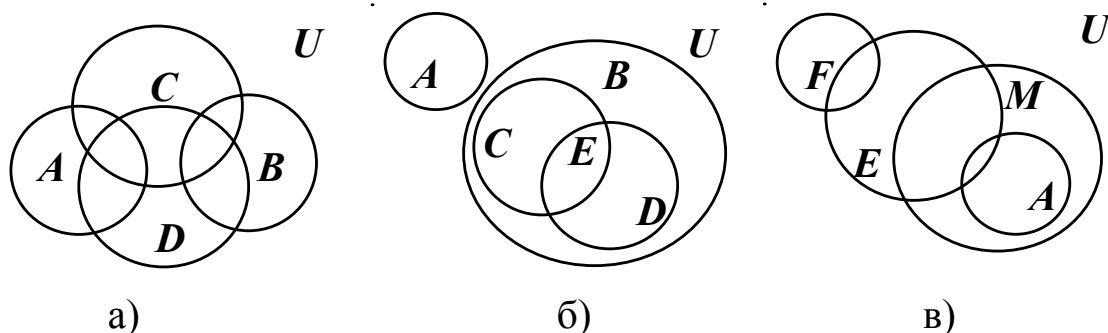
1. Основные понятия теории множеств. Задание множеств.
2. Операции над множествами.
3. Числовые множества.
4. Системы счисления. Правила перевода чисел.
5. Отношение делимости. Алгоритм Евклида.
6. Бинарные соответствия.
7. Отображения.
8. Числовые функции.
9. Основные понятия математической логики.
10. Операции над высказываниями.
11. Формулы и правила комбинаторики.
12. Случайные события.
13. Сумма и произведение событий, условная вероятность.
14. Случайные величины, их числовые характеристики.
15. Ковариация и коэффициент корреляции.
16. Основные понятия математической статистики.
17. Первичная статистическая обработка данных.
18. Точечные оценки числовых параметров.

**Ответы к заданиям для самостоятельного решения
(базовый материал)**

1.1. $A = \{\text{Антарктида; Австралия; Африка; Евразия; Северная Америка; Юж. Америка}\}$, $A = \{x \mid x - \text{континент Земли}\}$;
 $B = \{\text{Меркурий; Венера; Земля; Марс; Юпитер; Сатурн; Уран; Нептун; Плутон}\}$, $B = \{x \mid x - \text{планета Солнечной системы}\}$;
 $C = \{a; e; ё; и; о; у; ы; э; ю; я\}$, $C = \{x \mid x - \text{гласная буква русского алфавита}\}$;
 $D = \{M \mid |AM| = |MB|\}$; $E = \{M \mid |OM| = r\}$.

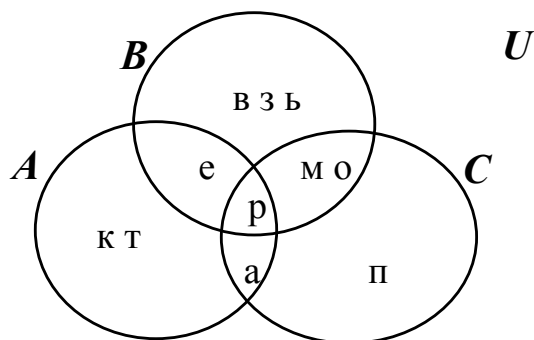
1.2. а) несобственные: A и $\emptyset$; собственные: B, D, Q ; б) несобственные: A и $\emptyset$; собственные: C, E, Q .

1.3.

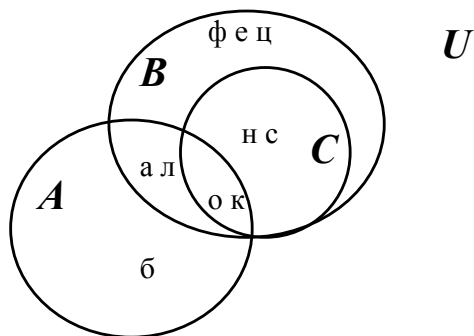


1.4.

а) $A = \{к; а; т; е; р\}$, $B = \{в; з; м; о; р; ь; е\}$, $C = \{п; а; р; о; м\}$. До изображения множеств на диаграмме рекомендуется найти следующие пересечения: $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ и $A \cap B \cap C$.



б) $A = \{\kappa; \text{o}; \text{л}; \text{б}; \text{а}\}$, $B = \{\phi; \text{а}; \kappa; \text{е}; \text{л}; \text{o}; \text{н}; \text{с}; \text{ц}\}$, $C = \{\text{н}; \text{o}; \text{с}; \kappa\}$.



1.5.

а) $A \cap B = \{\tau; \text{ю}\}$, $A \cup B = \{y; \tau; \text{ю}; \gamma; \phi; \text{я}; \kappa\}$, $A \setminus B = \{y; \gamma\}$, $B \setminus A = \{\phi; \text{я}; \kappa\}$;

б) $A \cap B = \{a; p; y; \kappa\}$, $A \cup B = \{\phi; a; p; \tau; y; \kappa; \text{б}; \text{н}; \text{o}\}$, $A \setminus B = \{\phi; \tau\}$, $B \setminus A = \{\text{б}; \text{н}; \text{o}\}$;

в) $A \cap B = \{4; 8; 2; 5\} = A$, $A \cup B = \{5; 2; 8; 3; 4\} = B$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{3\}$;

г) $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{7; 9; 3; 1; 2; 4; 8; 0\}$, $A \setminus B = \{7; 9; 3\}$, $B \setminus A = \{2; 4; 8; 0\}$.

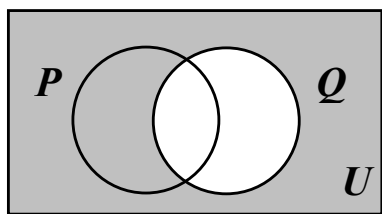
1.6.

а) $A \cap B = \{2; 4; 6\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 0\}$, $A \setminus B = \{1; 3; 5\}$, $B \setminus A = \{8; 0\}$, $A' = \{7; 8; 9; 0\}$, $B' = \{1; 3; 5; 7; 9\}$;

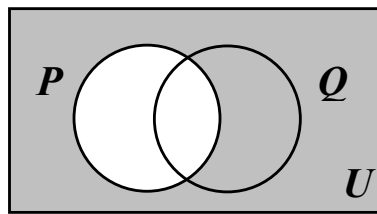
б) $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$, $A \setminus B = \{1; 2; 3; 4\} = A$, $B \setminus A = \{6; 7; 8\} = B$, $A' = \{5; 6; 7; 8; 9; 0\}$, $B' = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 0\}$;

в) $A \cap B = \{1; 2; 5; 6\} = B$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7\} = A$, $A \setminus B = \{3; 4; 7\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $A' = \{8; 9; 0\}$, $B' = \{3; 4; 7; 8; 9; 0\}$.

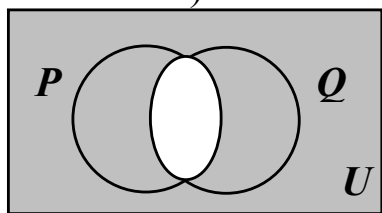
1.7.



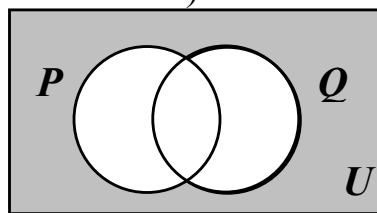
а)



б)

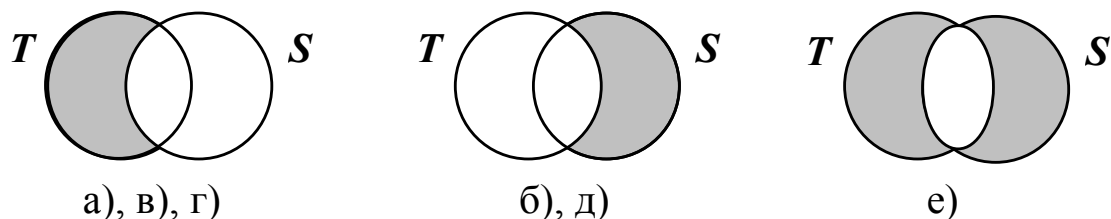


г), е)



в), д)

1.8.



1.9. $O_1 = A \cap B \cap C$; $O_2 = (A \cap B) \setminus C$; $O_3 = (B \cap C) \setminus A$;
 $O_4 = (A \cap C) \setminus B$; $O_5 = A \setminus (B \cup C)$; $O_6 = B \setminus (A \cup C)$;
 $O_7 = C \setminus (A \cup B)$; $O_8 = (A \cup B \cup C)'$.

1.10.

- а) $A = \{0; 1\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_0, x < 2\}$;
 б) $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8\}$;
 в) $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 2\}$;
 г) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 2\}$.

1.11.

- а) $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < x < 5\}$, $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 8\}$,
 $A \setminus B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x \leq 8\}$, $B \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 2\}$;
 б) $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 5\}$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \setminus B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 5\}$, $B \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$;
 в) $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 3\} = B$, $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x \leq 7\} = A$, $A \setminus B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x \leq 1 \text{ или } 3 \leq x \leq 7\}$,
 $B \setminus A = \emptyset$;
 г) $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\} = A$, $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -2\} = B$,
 $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 1 \text{ или } x > 7\}$.

2.1. а) Если идет дождь, то я читаю книгу или пою; б) Неверно, что я читаю книгу или пою тогда и только тогда, когда идет дождь; в) Если я не читаю книгу и не пою, то идет дождь.

2.2.

а)

A	B	$A \Rightarrow \overline{B} \wedge A$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

б)

A	B	$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

в-3)

A	B	C	в)	г)	д)	е)	ж)	з)
И	И	И	И	Л	Л	И	И	Л
И	И	Л	И	И	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И	И	И	Л
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	И

2.3.

- а) $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Leftrightarrow A$;
 б) $(B \Leftrightarrow C \Rightarrow A) \wedge (\bar{A} \vee B \wedge C)$;
 в) $\overline{(A \vee B \Rightarrow C)} \wedge (A \Leftrightarrow B)$.

2.4. Например, для солнечного вторника, в который по расписанию проводится занятие по математике, значения будут следующими: A – И, B – И, C – Л.

а) $A \Rightarrow (B \vee C)$: «Если я буду решать задачи, то сегодня солнечно или понедельник» – И;

б) $A \Rightarrow (B \wedge C)$: «Если я буду решать задачи, то сегодня солнечно и понедельник» – Л;

в) $A \Rightarrow \overline{(B \vee C)}$: «Если я буду решать задачи, то неверно, что сегодня солнечно или понедельник» – Л;

г) $A \Leftrightarrow (\bar{B} \vee C)$: «Я буду решать задачи тогда и только тогда, когда не солнечно или понедельник» – Л.

2.5. Ответ во всех пунктах: Равенство доказано.

2.6. Ответ во всех пунктах: Тавтология доказана.

3.1. 1080 способов.

3.2. 20 словарей.

3.3. 675675 способов.

3.4. 10 вариантов.

3.5. 9 способов.

3.6. 6 чисел (123, 132, 213, 232, 312, 321).

3.7. Поскольку в множествах элементы не повторяются, то множество гласных букв состоит только из элементов {о; а}. Ответ: $2 \cdot 6 = 12$ способами.

3.8. 210 чисел.

3.9. 12 способами.

3.10. 15 способами.

3.11. 3325608 способами.

3.12. $p(A) = 24/30 = 0,8$; $p(B) = 6/30 = 0,2$; $p(C) = 8/30 \approx 0,27$;
 $p(D) = 16/30 \approx 0,53$; $p(E) = 20/30 \approx 0,67$.

3.13. $p(A) = 1/90 \approx 0,01$; $p(B) = 45/90 = 0,5$; $p(C) = 81/90 = 0,9$;
 $p(D) = 18/90 = 0,2$.

3.14. 0,8.

3.15. $\approx 0,19$.

3.16. 0,88 и 0,72 соответственно для Иванова и Петрова.
Изменится: $(22 - 1)/(25 - 1) = 21/24 = 0,875 \neq 0,88$.

3.17. $p(A) = 3/36 \approx 0,08$; $p(B) = 5/36 \approx 0,14$; $p(C) = 2/36 \approx 0,06$.

3.18. $210/495 \approx 0,42$.

3.19. $p(A) = 10/1140 \approx 0,01$; $p(B) = 280/1140 \approx 0,25$;
 $p(C) = 196/1140 \approx 0,17$.

3.20. $p(x = 2) = 0,2$; $M(X) = 1$; $D(X) = 1$; $\sigma(X) = 1$.

3.21. $p(x = 4) = 0,2$; $M(X) = 2,7$; $D(X) \approx 2$; $\sigma(X) \approx 1,42$.

3.22. $M(t) = 4$; $D(t) = 3,8$; $\sigma(t) \approx 1,9$.

3.23.

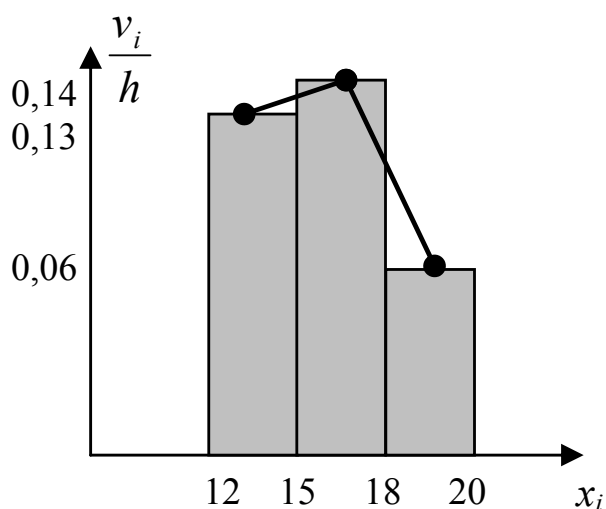
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$M(X) = 7$; $D(X) = 5,8$; $\sigma(X) \approx 2,4$.

4.1. $n = 30$, $R = 8$;

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	4	5	3	5	5	3	2	2	1
v_i	0,13	0,17	0,1	0,17	0,17	0,1	0,07	0,07	0,03

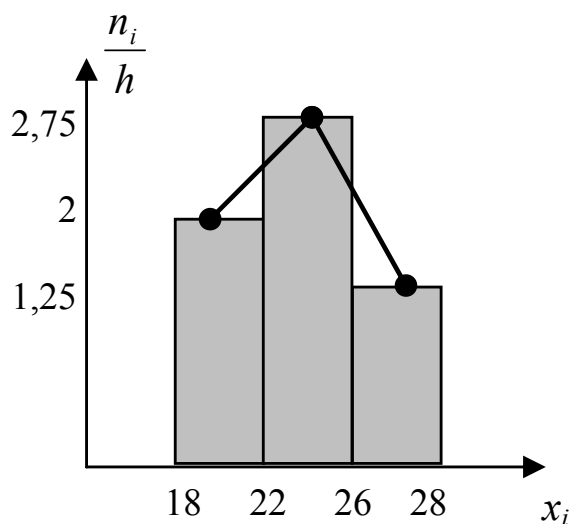
x_i	12–15	15–18	18–20
n_i	12	13	5
v_i	0,4	0,43	0,17



4.2. $n = 24$, $R = 10$;

x_i	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
n_i	1	2	2	3	4	2	2	3	1	2	2
v_i	0,04	0,08	0,08	0,13	0,17	0,08	0,08	0,13	0,04	0,08	0,08

x_i	18–22	22–26	26–28
n_i	8	11	5
v_i	0,33	0,46	0,21



4.3. $\bar{X} = 4,12; s^2 \approx 2,79; s \approx 1,67.$

4.4. $\bar{X} = 38,38; s^2 \approx 3,04; s \approx 1,74.$

Ответы к заданиям примерных контрольных работ (основной курс)

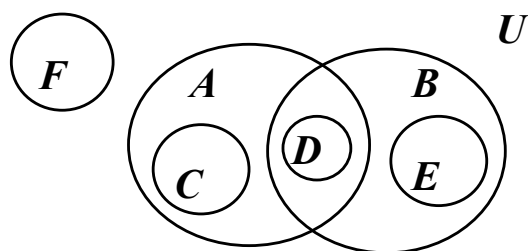
Контрольная работа № 1

1.1.

а) $A \cap B = \{4; 5; 10\}, A \cup B = \{4; 5; 6; 8; 9; 10; 13; 15; 18\},$
 $A \setminus B = \{13; 15; 18\}, B \setminus A = \{6; 8; 9\};$

б) $A \cap B = \{o; p; c\}, A \cup B = \{к; o; p; п; y; c; ё; т\}, A \setminus B = \{к; п; y\},$
 $B \setminus A = \{ё; т\}.$

1.2.



1.3.

A	B	C	$(C \Leftrightarrow A) \Rightarrow \overline{B \wedge C}$
И	И	И	Л
И	И	Л	И
И	Л	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	И	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	И
Л	Л	Л	И

1.4.

A	B	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B)$	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	И

Равенство доказано.

Контрольная работа № 2

2.1. 3003.

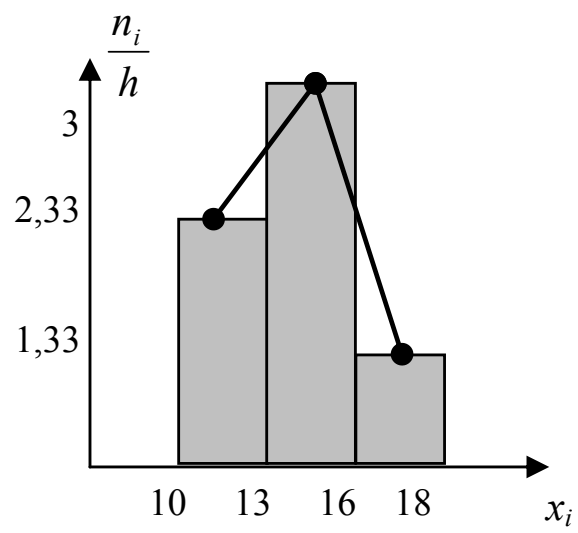
2.2. $p(A) = 0,02$; $p(B) = 0,032$; $p(C) = 0,332$.

2.3. $p(x = 2) = 0,4$; $M(X) = 1,9$; $D(X) = 0,89$, $\sigma(X) = 0,94$.

2.4. $n = 20$, $R = 8$;

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n_i	1	2	4	4	3	2	2	1	1
v_i	0,05	0,1	0,2	0,2	0,15	0,1	0,1	0,05	0,05

x_i	10–13	13–16	16–18
n_i	7	9	4
v_i	0,35	0,45	0,2



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Балдин, К. В. Математика для гуманитариев: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, В. В. Мартынов, А. В. Рукосуев. – М.: Дашков и К^о, 2009. – 512 с.
2. Грес, П. В. Математика для гуманитариев: учеб. пособие / П. В. Грес. – М.: Унив. кн., 2009. – 288 с.
3. Просветов, Г. И. Математика для гуманитариев. Задачи и решения: учеб. пособие / Г. И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 320 с.
4. Суходольский, Г. В. Математика для гуманитариев: учеб. пособие / Г. В. Суходольский. – М.: Гуманитар. центр, 2007. – 256 с.
5. Турецкий, В. Я. Математика и информатика: учебник / В. Я. Турецкий. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 560 с.

Дополнительная

6. Баврин, И. И. Высшая математика: учебник / И. И. Баврин, В. Л. Матросов. – М.: Академия, 2010. – 616 с.
7. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2010. – 416 с.
8. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2010. – 480 с.
9. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина – М.: Юнити-Дана, 2009. – 352 с.
10. Кремер, Н. Ш. Теория вероятности и математическая статистика: учебник / Н. Ш. Кремер. – М.: Юнити-Дана, 2010. – 552 с.
11. Солодовников, А. С. Математика в экономике / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 2011. – 560 с.